This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math
9109
08

Math 9109.08

HARVARD SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787–1855)
OF BOSTON

FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION

SURFACES NAUTILOÏDES

ANNAES DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO
Publicados sob a direcção de F. Gomes Teixeira
Extracto do tomo III, 1908

SURFACES NAUTILOÏDES

PAR

HATON DE LA GOUPILLIÈRE
Membre de l'Institut
Inspecteur général des Mines

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1908

Math 9109.08

HARVARD COLLEGE
SEP 6 1921
LIBRARY

Degrand fund B

R. 4822

TABLE

Pag.

Introduction 1

PREMIERE PARTIE

Surfaces à front générateur

§ I — Préliminaires 2
§ II — Les quatre types simples 6
§ III — Nautile à front méridien 11
§ IV — Mouvement nautiloïde 21
§ V — Equation des surfaces nautiloïdes 26
§ VI — Plan tangent 32
§ VII — Nautile à front normal 38

SECONDE PARTIE

Volume, centre de gravité, moment d'inertie

§ VIII — Formules fondamentales 43
§ IX — Volume 47
§ X — Centres de gravité 56
§ XI — Lieux géométriques du centre de gravité 59
§ XII — Moments d'inertie 66
§ XIII — Applications aux nautiloïdes 74
§ XIV — Front oblique 77
§ XV — Coordonnées intrinsèques 83

TROISIEME PARTIE

Surfaces sphérales

Pag.

§ XVI — Surfaces enveloppes 89
§ XVII — Surfaces sphérales 93
§ XVIII — Sphérales réciproques 99
§ XIX — Directrice en coordonnées sphériques 102
§ XX — Directrice en coordonnées rectangulaires 106
§ XXI — Directrice en coordonnées polaires 112
§ XXII — Sphéro-nautile 121
§ XXIII — Cônes circonscrits 127
§ XXIV — Directrice en coordonnées intrinsèques 132

QUATRIEME PARTIE

Lignes de courbure, surfaces podaires

§ XXV — Lignes de courbure en coordonnées rectangulaires ... 138
§ XXVI — Lignes de courbure en coordonnées polaires 146
§ XXVII — Surfaces podaires 161
§ XXVIII — Surfaces antipodaires 164
§ XXIX — Surfaces normopodaires 165
§ XXX — Surfaces cérítoïdes 171

SURFACES NAUTILOÏDES

PAR

HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Membre de l'Institut
Inspecteur général des Mines
Grand-Officier de la Légion-d'Honneur

INTRODUCTION

On a souvent l'occasion de saisir dans la nature un reflet des formes rigoureuses qu'étudie la géométrie. Sans insister sur la cristallographie qui en est la plus frappante manifestation, mais qui relève uniquement des forces physiques et chimiques, nous en trouvons dans les corps vivants plus d'un exemple.

La botanique nous présente des végétaux dont la frondaison dessine une sphère parfaite. Des cônes de révolution circonscrivent exactement le feuillage de divers arbres, ou en modèlent le tronc avec une grande précision. La loi de l'insertion des feuilles sur la tige accuse l'influence de l'hélice, dont le pandanus nous présente les spirales elles-mêmes dans leur continuité.

Le règne animal de son côté a reçu du créateur certaines empreintes géométriques. On y remarque chez les zoophytes la division pentagonale, la moins simple précisément de celles des études élémentaires. Les zoologistes ont signalé dans le nautile, dans l'ammonite le caractère de l'une des lignes planes les plus remarquables, la spirale logarithmique. Le cérite, l'hélix dessinent des courbes gauches d'une frappante régularité.

Il m'a semblé intéressant d'appliquer les ressources de l'analyse géométrique à l'étude de la plus élégante de ces surfaces, en lui conservant pour plus de simplicité le nom qui lui appartient dans l'histoire naturelle : le *nautile*. Mais il est arrivé qu'au cours de cette étude, elle s'est élargie d'elle-même, et m'a entrainé à des développements plus étendus. Pour l'exposer ici dans son ensemble, il sera plus simple de procéder du général au particulier.

PREMIERE PARTIE

Surfaces à front générateur

§ I

Préliminaires

1. Nous emploierons concurremment les coordonnées rectangulaires : abscisse x, ordonnée y, altitude z; et les coordonnées *mixtes :* rayon vecteur *horizontal* (1)

$$R = \sqrt{x^2 + y^2},$$

longitude

$$\omega = \text{arc tang} \frac{y}{x},$$

comptée à partir du premier méridien ZOX, autour de l'axe *zénithal* OZ, enfin la latitude

$$\lambda = \text{arc tang} \frac{z}{R},$$

rapportée au plan de *l'équateur* XOY.

On a d'ailleurs inversement

$$x = R \cos \omega, \quad y = R \sin \omega, \quad z = R \text{ tang } \lambda.$$

(1) Nous désignerons par ρ le rayon vecteur de l'espace

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2. L'objet essentiel de ces recherches concerne les *surfaces à front générateur*, que nous constituerons de la manière suivante.

Nous nous donnons dans le plan de l'équateur (fig. 1) une courbe *directrice*

$$r = F(\theta).$$

Je désigne par r, θ les coordonnées polaires planes de son point décrivant M, afin de prévenir toute confusion avec celles R, ω, λ des points N de la surface.

Par le point décrivant je méne, perpendiculairement à l'équateur, un plan qui prendra le nom de *front générateur*. Il est indiqué par sa trace FF', autour de laquelle nous le rabattons pour montrer, en trait pointillé, la courbe *génératrice* FNF'. Nous la représenterons par l'équation

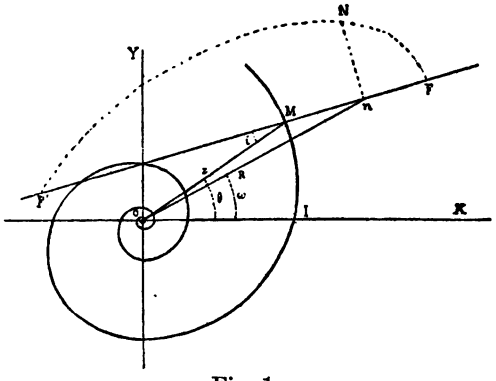

Fig. 1

$$\xi = f(z),$$

entre son abscisse $\xi = Mn$ et son ordonnée $z = Nn$, rapportées au point décrivant comme origine, à l'aide des axes MF dans l'équateur et MZ' parallèle à l'axe zénithal.

La condition fondamentale qui dominera toute cette théorie est que, *pendant le mouvement du plan de front la génératrice reste semblable à elle même par rapport au point décrivant.* Le rapport de similitude, arbitraire comme tous les autres éléments de la question, sera représenté par la fonction

$$\varphi(\theta).$$

L'équation de cette génératrice, à chaque instant de sa déformation progressive, prendra donc la forme

$$(1) \qquad \frac{\xi}{\varphi(\theta)} = f\left[\frac{z}{\varphi(\theta)}\right].$$

Enfin un quatrième élément détermine à tout instant la position de la trace du front par rapport au rayon vecteur de la directrice, à savoir l'angle de ces deux droites

$$i = \psi(\theta).$$

La surface à front générateur se trouve ainsi constituée à l'aide de quatre éléments fonctionnels arbitraires, que nous représenterons d'une manière abrégée par F, f, φ, ψ, en y sous-entendant la variable, lors qu'elle sera suffisamment désignée.

Etablissons d'abord deux formules fondamentales.

3. La première présente ce caractère spécial de rester indépendante de la fonction f, c'est à-dire de la génératrice. C'est l'équation de la trace FF' du plan de front, sur laquelle en effet se projette indifféremment tout ce que renferme ce plan.

Nous avons dans le triangle OMn

$$\frac{On}{\sin OMn} = \frac{OM}{\sin . OnM}, \qquad \frac{R}{\sin i} = \frac{r}{\sin[i - (\theta - \omega)]},$$

et enfin

$$(2) \qquad R \sin(\omega - \theta + i) = r \sin i = F \sin \psi.$$

4. Ce triangle nous donne également

$$\overline{On}^2 = \overline{OM}^2 - 2\overline{OM}.\overline{Mn}.\cos OMn + \overline{Mn}^2,$$

c'est-à-dire (1)

$$(3) \qquad R^2 = F^2 + 2F\varphi f\left(\frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi}\right) \cos\psi + \varphi^2 f^2\left(\frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi}\right).$$

Pour obtenir, entre R, ω, λ l'équation de la surface à front générateur, il suffira d'éliminer entre les relations (2) et (3) le paramètre θ, lorsque seront spécifiés dans chaque cas les symboles F, f, φ, ψ.

5. La question posée dans ces termes comporte une grande généralité.

En ce qui concerne en premier lieu le front, on peut supposer: 1° qu'il dépende uniquement de la directrice; par exemple en faisant avec sa tangente un angle constant (lequel sera

droit pour les *surfaces à front normal*); 2° ou qu'il ne dépende au contraire que du rayon vecteur; en exécutant par exemple autour de M une rotation proportionnelle à celle que ce rayon effectue autour du pôle. Si le coefficient de cette proportionnalité est -1, le front reste parallèle à lui même [1]; pour la valeur $+1$, il fait avec ce rayon un angle constant (en particulier un angle nul dans les *surfaces à front méridien*); si l'on a le coefficient $+2$, le front et l'axe polaire constituent à chaque instant avec le rayon vecteur un triangle isocèle, etc.; 3° ou enfin le front dépend à la fois du rayon et de la directrice; par exemple en se disposant suivant l'une des bissectrices de leur angle, ou en tournant sur lui-même proportionnellement à la déviation qu'éprouve cette droite, etc.

Quant à la génératrice, son choix reste illimité. L'on peut penser à la vérité que le cercle fournira pour les arts de la décoration la meilleure ressource; soit qu'il ait son centre au point décrivant ou qu'il constitue un excentrique; en lui attribuant une position déterminée ou gyratoire. Toutefois diverses autres courbes peuvent être envisagées, au point de vue de l'art, aussi bien que des facilités du calcul.

Mais c'est assurément le choix de la directrice qui imprimera le caractère le plus accentué aux diverses familles de surfaces ainsi constituées. Supposons la par exemple rectiligne et le front parallèle à lui même, en adoptant comme paramètre de similitude la longueur parcourue par lui suivant cette directrice à partir d'un de ses points; nous aurons ainsi le groupe des cônes, et à la limite celui des cylindres. Mais on pourrait en obtenir de différents avec la ligne droite, en modifiant les autres conditions.

Si on lui substitue le cercle en plaçant son centre au pôle, avec un front normal et une génératrice immuable ($\varphi = 1$), nous retrouvons les surfaces de révolution. Mais le cercle peut aussi fournir d'autres familles avec des lois différentes.

Nous donnerons dans la suite de cette étude une prépondérance toute spéciale comme directrice à la *spirale logarithmique;* et c'est de ce choix que nous ferons sortir le groupe des *surfaces nautiloïdes* qui semblera peut être, par l'importance de ses propriétés, mériter de prendre place dans la science.

---

[1] Lorsque le front reste parallèle à lui-même, on peut, en désignant par α la constante $\theta - i$ qui mesure son inclinaison sur l'axe polaire, donner à la relation (3) la forme suivante

$$(F + f + R)(F + f - R)(F - f + R)(-F + f + R) = [2fR \sin(\omega - \alpha)]^2.$$

§ II

Les quatre types simples

6. Attachons nous tout d'abord à dégager pour chacun des quatre éléments fonctionnels F, f, φ, ψ, l'hypothèse la plus simple qui lui soit propre.

En ce qui concerne en premier lieu l'inclinaison du front sur le rayon vecteur, cette condition sera évidemment

$$\psi = 0,$$

et confondra incessamment ce plan avec celui du méridien, c'est-à-dire sa trace avec le rayon vecteur de la directrice. Nous conservons d'ailleurs une entière généralité pour les trois autres fonctions F, f, φ.

Il est facile d'établir l'équation de ces *surfaces à front méridien*. Les relations (3), (1), (2) deviennent en effet

$$\cos i = 1,$$

$$(4) \qquad R^2 = F^2 + 2F\xi + \xi^2 = (F + \xi)^2,$$

$$R = F + f\left(\frac{z}{\varphi}\right),$$

$$\omega = \theta.$$

La longitude ω d'un point quelconque N (fig. 2) de la génératrice méridienne peut ainsi être substituée, sous les signes fonctionnels, à l'azimut θ du point décrivant M, et il vient pour l'équation cherchée

$$(5) \qquad R = F(\omega) + \varphi(\omega) f\left[\frac{R \operatorname{tang} \lambda}{\varphi(\omega)}\right].$$

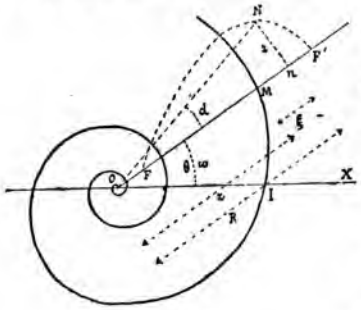

Fig. 2

J'ai préféré la déduire de nos formules fondamentales, afin d'en montrer de suite l'usage, mais il est facile de la lire directement sur la figure 2.

7. En ce qui concerne en second lieu le rapport de similitude, le paramètre de beaucoup le plus utile sera le rayon ve-

cteur lui même

$$\varphi = r = F.$$

La génératrice variable est alors représentée (1) par l'équation

$$\xi = F.f\left(\frac{z}{F}\right). \tag{6}$$

Nous appellerons de telles surfaces *vectorielles*, quelles que soient d'ailleurs les fonctions F, f, ψ.

8. Adjoignons à la condition vectorielle celle de l'inclinaison constante du front sur le rayon vecteur

$$\psi = \text{const.}$$

Les surfaces ainsi constituées, quelles que soient F et f (c'est-à-dire la génératrice et la directrice) jouissent d'une importante propriété.

Le triangle OMn (fig. 1) conserve en effet pendant le mouvement générateur du point N sur sa trajectoire de l'espace, un angle invariable $\pi - i$ compris entre deux cotés proportionnels r et ξ. Il reste donc semblable à lui-même. Dès lors On sera proportionnel à Mn, et par suite à Nn. En même temps ce rayon vecteur On fait avec OM un angle invariable qui est la différence de i et de MOn. Le point n décrit donc une courbe semblable à la directrice. D'autre part enfin l'angle *vertical* NOn, qui n'est autre que la latitude λ du point N, reste lui même constant durant le mouvement. De là ce théorème:

Si l'on coupe par un *cône de latitude*

$$\lambda = \text{const.},$$

une surface *vectorielle d'inclinaison frontale constante* la courbe gauche d'intersection (N) conserve une projection équatoriale (n) semblable à la directrice (M), quelles que soient cette dernière aussi bien que la génératrice.

Le plan de l'équateur se trouve d'après cela *sillonné* de telles lignes pour les divers points N qui constituent le profil générateur. Imaginons dès lors que l'on fasse varier d'une manière continue le cône de latitude, depuis un angle infinitésimal autour de l'axe zénithal jusqu'à son épanouissement complet dans l'équateur, suivi lui-même d'un repliement en dessous jusqu'à l'axe nadiral. On verra, en suivant par la pensée le déplace-

ment corrélatif de l'intersection (N) sur la surface, la courbe plane (*n*) *balayer* le plan de l'équateur *en restant semblable à elle-même*, puis qu'elle doit toujours l'être à la directrice.

Bien entendu, selon la composition de la génératrice, sa rencontre avec le cône de latitude peut s'opérer en un nombre multiple de points, dont quelques uns peuvent devenir accidentellement des points de tangence. Il y aura donc en général plusieurs courbes semblables balayant à la fois diverses zônes de l'équateur, en s'éloignant ou se rapprochant les unes des autres, pour arriver à se fondre ensemble à l'instant d'un contact.

9. En ce qui concerne en troisième lieu la génératrice, le choix le plus simple sous le rapport géométrique, en même temps que le plus rapproché des vues qui nous dirigent en histoire naturelle vers le genre *Nautilus*, de la famille des *Nautilidés*, est celui d'un cercle dont le centre parcourrait la directrice quelconque F.

Supposons en même temps la surface vectorielle. L'équation de la circonférence variable devient alors à chaque instant

$$\xi^2 + z^2 = B^2 r^2, \qquad \xi = \sqrt{B^2 r^2 - z^2},$$

en désignant par B le multiple constant du rayon vecteur de la directrice qui fournit le rayon de courbure de la génératrice circulaire.

Admettons enfin, en ce qui concerne l'inclinaison frontale, la loi du front méridien. L'équation (5) de cette classe de surfaces devient dans ce cas

$$R = r \pm \sqrt{B^2 r^2 - R^2 \operatorname{tang}^2 \lambda},$$

entre les coordonnées R, ω, λ, une fois que l'on a remplacé r par F(ω). Elle subit les transformations suivantes

$$(R - r)^2 = B^2 r^2 - R^2 \operatorname{tang}^2 \lambda,$$

$$R^2 (1 + \operatorname{tang}^2 \lambda) - 2Rr + r^2 (1 - B^2) = 0,$$

$$\left(\frac{R}{\cos \lambda}\right)^2 - 2r \cos \lambda \left(\frac{R}{\cos \lambda}\right) + r^2 (1 - B^2) = 0,$$

$$\frac{R}{\cos \lambda} = r \cos \lambda \pm \sqrt{r^2 \cos^2 \lambda + (B^2 - 1) r^2},$$

$$R = F(\omega) \cos \lambda (\cos \lambda \pm \sqrt{B^2 - \sin^2 \lambda}). \tag{7}$$

Cette formule vérifie avec évidence le théorême du N° 9 relatif aux surfaces vectorielles d'inclinaison frontale constante, d'après lequel, pour une latitude fixe, la projection horizontale reste semblable à la directrice : $R = F(\omega)$.

10. La surface ainsi constituée est symétrique par rapport à l'équateur, puisque son équation ne dépend que de $\cos\lambda$ et $\sin^2\lambda$. Contentons nous donc de raisonner sur la moitié supérieure, en faisant varïer λ seulement do 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Son sinus restant positif, la condition de réalité du radical se réduit à

$$\sin\lambda < B.$$

Si $B > 1$, (le cercle générateur recouvrant alors le pôle comme une voûte), cette inégalité ne limitera en rien la variation de λ dans toute l'étendre de l'angle droit.

Le cas-limite $B = 1$ prendra une grande importance dans la suite de ces recherches. Nous désignerons sous le nom *d'équiradiales* les surfaces qui lui correspondent.

Mais supposons au contraire $B < 1$, (le profil circulaire restant alors entièrement situé d'un même côté du pôle), nous poserons pour simplifier les calculs

$$B = \sin b.$$

Dans ce cas, l'on n'obtiendra d'intersection du cône de révolution avec la surface qu'en dessous de la latitude

$$\sin\lambda_0 = B, \qquad \lambda_0 = b.$$

A cette limite même, l'équation (7) de la surface nons donne

$$R = r\cos^2\lambda_0 = F(\omega)\cos^2 b.$$

Au dessous, l'intersection se développe suivant deux branches distinctes, qui vont en s'écartant l'une de l'autre jusqu'à ce qu'elles forment les deux parties de la trace équatoriale, pour les valeurs

$$\lambda_1 = 0, \qquad R = r(1 \pm B) = (1 \pm \sin b)\,F(\omega).$$

11. En ce qui concerne en quatrième lieu la directrice, nous

fixerons notre attention d'une manière toute spéciale sur la spirale logarithmique.

Nous prendrons son équation sous la forme

$$r = e^{A\theta} = e^{\theta \cot a},$$

en désignant par a l'inclinaison constante de sa tangente sur le rayon vecteur, et prenant comme unité la longueur OI interceptée par la courbe sur l'axe polaire, pour l'azimut $\theta = 0$.

Si nous supposons dans ce cas la surface vectorielle et d'inclinaison frontale constante, elle prendra pour nous *sous cette triple condition* le nom de *surface nautiloïde,* quelle que soit sa génératrice f. De là une famille de surfaces bien définie.

La proposition du N° 9 leur convient, et se précise même alors encore plus. En effet les courbes semblables à la spirale logarithmique

$$r = ce^{A\theta} = e^{A(\theta + \log c \operatorname{tang} a)},$$

sont des spirales égales mais déviées de l'angle $\log c \operatorname{tang} a$ autour du pôle (1). Si nous fondons d'ailleurs cette déviation dans la gyration qui a été envisagée au N° 9, c'est alors la directrice *elle-même* que l'on voit entrer en mouvement pour balayer l'équateur sans changer de forme (en se dédoublant au besoin de différentes façons pour des intersections multiples, avec des rotations de divers sens pour ses diverses individualités) au fur et à mesure que le cône de latitude varie du zénith au nadir en passant par l'équateur.

12. Ces lignes de latitude jouissent dans les nautiloïdes d'une propriété très remarquable.

L'ordonnée du point déterminé par cette latitude constante reste par cela seul sa propre homologue sur les génératrices semblables dans toutes leurs situations. Elle sera donc proportionnelle au rayon vecteur du point décrivant de la directrice, ce qui donne

$$z = Cr = Ce^{A\theta}.$$

On a d'après cela tout à la fois

$$dr = Ae^{A\theta}d\theta, \qquad dz = ACe^{A\theta}d\theta,$$

---

(1) Tous les logarithmes qui figurent dans ce mémoire sont pris dans le système népérien.

et il vient pour l'inclinaison j de cette courbe sur l'horizon :

$$\operatorname{tang} j = \frac{dz}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = \frac{AC}{\sqrt{A^2+1}} = C \cos a,$$

valeur constante.

D'après la similitude que conserve incessamment la figure formée par la tangente, l'équateur, le cône, sa génératrice et son plan tangent, il en sera de même de l'angle que comprennent entre elles la tangente et la génératrice du cône. Cette ligne gauche serpente donc sur le cône de révolution en traversant sous un même angle toutes ses arêtes.

On reconnait à ce caractère la courbe qui a été étudiée par Tissot (*Nouvelles annales de mathématiques*, 1852), Paul. Serret (*Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure,* 1860, page 101), G. Pirondini (*Journal für Mathematik,* Berlin, tome cxviii, page 61), F. Gomes Teixeira (*Tratado de las curvas especiales notables,* Madrid, 1905, page 566). Le second de ces géomètres lui a donné le nom d'*hélice cylindro-conique.* Cette dénomination serait un peu longue pour le très fréquent usage que nous aurons à en faire. Je lui substituerai pour ce motif l'abréviation : *cônhélice.*

Remarquons avec soin que, si toutes les cônhélices sont des *lignes d'égale pente* du nautiloïde, toutes les lignes d'égale pente de ces surfaces ne sont pas des cônhélices. Il suffit d'en donner cette raison évidente qu'il y a en chaque point une seule de ces dernières, déterminée par son cône de latitude, tandis qu'il part de ce point une infinité de lignes d'égale pente sous toutes sortes d'inclinaisons.

§ III

Nautile à front méridien

13. Réunissons actuellement ensemble les quatre conditions simples qui viennent d'être étudiées distinctement, à savoir : la génératrice circulaire, la directrice spirale, le rapport vectoriel et le front méridien. Nous constituons ainsi un premier type bien déterminé, en vue de l'assimilation que nous cherchons avec la nature vivante. Nous lui donnerons le nom de *nautile à front méridien.*

Son l'équation sera (7)

$$R = e^{A\omega} \cos\lambda \left(\cos\lambda \pm \sqrt{\sin^2 b - \sin^2 \lambda}\right).$$

Elle met bien en évidence la nature des lignes de latitude. Si l'on emploie en effet l'abréviation

$$\delta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \left[\cos\lambda \left(\cos\lambda \pm \sqrt{\sin^2 b - \sin^2\lambda}\right)\right],$$

cette formule devient simplement

$$R = e^{A(\omega+\delta)},$$

et représente en projection équatoriale, pour une latitude constante, une spirale logarithmique égale à la directrice, et déviée de l'angle δ.

Pour la valeur limite $\lambda_0 = b$, le double signe disparait; on obtient alors la projection de la ligne de contact du nautile avec le cône qui lui est circonscrit à partir du pôle. Elle a pour déviation

$$\delta_0 = 2 \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \cos b.$$

Celles des deux traces équatoriales (pour $\lambda_1 = 0$) sont de même

$$\delta_1 = \frac{\operatorname{Log}(1 \pm B)}{A}.$$

14. Nous avons établi (N° 10) une première distinction selon que $B \gtrless 1$, c'est-à-dire que le cercle générateur recouvre ou non le pôle. Une seconde division devient ici nécessaire. En effet cette circonférence peut être, on non, rencontrée par la nouvelle position qu'elle prend à son retour dans le même méridien pour engendrer la spire suivante. Par cela seul, le même cercle initial coupe de même la circonférence de la révolution précédente, en raison de la similitude permanente du groupe formé par deux méridiennes successives.

Si les cercles consécutifs restent nettement séparés par des intervalles vides, la surface se développe en une seule nappe de forme spiraloide, évasée transversalement en forme de cor comme dans le genre *criocéras*. C'est le cas le plus simple, et il est facile de formuler sa condition d'existence.

Les rayons vecteurs du point décrivant, pour deux révolutions successives de la directrice, sont $e^{A\theta}$ et $e^{A(\theta+2\pi)}$. Leur différence, c'est-à-dire l'intervalle de ces spires, a donc pour valeur

$$e^{A\theta}\left(e^{2\pi A} - 1\right).$$

Quant aux rayons correspondants des cercles générateurs, on les obtient en multipliant par B ces deux rayons vecteurs. Leur somme sera d'après cela

$$Be^{A\theta}(e^{2\pi A}+1).$$

Pour que les spires de la surface restent distinctes sans empiéter l'une sur l'autre, il faut que cette somme n'occupe pas la totalité de l'intervalle ci-dessus, c'est-à-dire que

$$B<\frac{e^{2\pi A}-1}{e^{2\pi A}+1}.$$

C'est donc par l'unité d'une part (N° 10) et par cette fonction que se trouvent séparées, pour une valeur donnée de A, les trois classes distinctes de nautile à front méridien.

15. Mais le cas des intersections présente une tout autre complexité. Etudions le avec quelque détail.

Nous emploierons comme coordonnées de la section méridienne dans son propre plan R et z. Le centre du cercle générateur ayant pour abscisse r, et son rayon étant Br, il aura comme équation

$$(8)\qquad (R-r)^2+z^2=B^2r^2,$$

$$R^2-2rR+z^2=(B^2-1)r^2,$$

$$2rR-R^2-z^2=r^2\cos^2 b.$$

La circonférence qui lui succède, non pas immédiatement mais *à* n *spires de distance,* nous donnerait de même

$$2r'R-R^2-z^2=r'^2\cos^2 b;$$

En retranchant ces deux relations, nous trouvons pour l'abscisse R de l'intersection

$$2(r'-r)R=(r'^2-r^2)\cos^2 b,$$

$$R=\frac{r+r'}{2}\cos^2 b.$$

Or on a

$$r'=e^{A(\omega+2n\pi)}=re^{2nA\pi},$$

et par conséquent

$$(9) \qquad R = \frac{1 + e^{2nA\pi}}{2} \cos^2 b \,.\, e^{A\omega} \,.$$

16. Si l'on envisage R et ω comme des coordonnées polaires, on obtient l'équation de la projection équatoriale de la trajectoire du point d'intersection, à savoir

$$R = e^{A(\omega + \Delta)} \,,$$

en posant pour abréger

$$\Delta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \left(\frac{e^{2nA\pi} + 1}{2} \cos^2 b \right) .$$

On y retrouve donc la spirale directrice elle-même déviée de l'angle Δ. Les courbes gauches qui lui correspondent pour les diverses valeurs de n seront certaines cônhélices spéciales du nautile.

Nous les appellerons *gouttières*. Cette dénomination se présente d'elle-même à l'esprit pour celles d'entre elles dont les parois latérales plongent toutes les deux vers le bas, figurant une vallée dont la cônhélice formerait le thalweg.

Si l'on engageait sur cette ligne une bille infinitésimale descendant sous l'action de la pesanteur sans aucune résistance passive, elle obéirait, d'après le théorème des forces vives, à la loi de mouvement connue sous le nom de *plan incliné;* laquelle n'est autre que celle de la chute libre des graves avec réduction de l'accélération d'après le sinus de la pente.

17. Cherchons d'autre part l'ordonnée z du point d'intersection. L'équation (8) nous donne à cet égard

$$\left(\frac{z}{R}\right)^2 = -1 + \frac{r}{R}\left(2 - \frac{r}{R}\cos^2 b\right) ,$$

c'est-á-dire (9)

$$\operatorname{tang}^2 \lambda = -1 + \frac{2}{(1 + e^{2nA\pi})\cos^2 b}\left(2 - \frac{2}{1 + e^{2nA\pi}}\right) ,$$

$$1 + \operatorname{tang}^2 \lambda = \frac{4e^{2nA\pi}}{(1 + e^{2nA\pi})^2 \cos^2 b} ,$$

$$(10) \qquad \cos \lambda = \frac{e^{nA\pi} + e^{-nA\pi}}{2} \cos b.$$

Cette valeur de $\cos\lambda$, bien qu'obtenue par l'extraction d'une racine carrée, ne comporte pas de double signe, attendu que l'angle de latitude ne se compte que de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Mais on voit qu'à chacune des valeurs positives de ce cosinus correspondent, d'après la symétrie de la formule, deux valeurs égales et de signes contraires de n. Il y a donc autant de circonférences à droite qu'à gauche du cercle central, duquel nous sommes partis, qui sont rencontrées par lui. Et en effet, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, il ressort de la similitude permanente que cette circonférence joue par rapport aux cercles moindres qu'elle situés sur sa ganche le même rôle qu'exercent à son égard les cercles plus grands qui se trouvent à sa droite.

On voit en outre que pour chaque valeur positive de $\cos\lambda$, la latitude est susceptible de deux valeurs égales et de signes contraires; conséquence immédiate d'ailleurs de la symétrie de la surface au dessus et au dessous de l'équateur.

18. Toutefois ces valeurs ne seront réelles que sous la condition

$$\cos\lambda < 1\,,$$

d'où l'on déduit (10)

$$e^{2n\mathrm{A}\pi} - \frac{2}{\cos b}\, e^{n\mathrm{A}\pi} + 1 < 0\,. \tag{11}$$

Pour que ce trinôme soit négatif, il faut que sa variable $e^{n\mathrm{A}\pi}$ reste comprise entre les deux racines, qui sont

$$\frac{1 \pm \sin b}{\cos b}\,,$$

ou sous des formes équivalentes

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right), \qquad \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right).$$

Ces valeurs sont réciproques l'une de l'autre. Leurs logarithmes (qui devront comprendre entre eux $n\mathrm{A}\pi$) sont donc égaux et de signes contraires. Par conséquent n ne doit pas

excéder les deux limites

$$\pm \frac{1}{A\pi} \operatorname{Log} \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right).$$

Il est facile de concevoir a priori qu'il doive y avoir, de part et d'autre, une limite pour les intersections [1]. Lorsque, en effet, à partir d'une position déterminée, le cercle s'éloigne de plus en plus par des rotations successives, encore bien que son diamètre augmente avec le rayon vecteur de son centre de manière à le recouvrir vers son extrémité sur des longueurs indéfiniment croissantes, il laisse cependant à découvert du côté du pôle un segment qui varie lui-même proportionellement, en arrivant ainsi à dépasser toute limite, et en particulier le rayon de la circonférence fixe sur laquelle portent nos raisonnements. A partir de ce moment, il n'y aura plus rencontre.

19. Appelons N le plus grand nombre entier qui satisfasse à la condition numérique

$$(12) \qquad N < \frac{\operatorname{tang} a}{\pi} \operatorname{Log} \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right),$$

le cercle considéré en rencontrera en tout 2N autres, à savoir N plus grands sur sa droite, et N moindres à gauche.

Si l'on voulait accroitre la valeur de ce total, et avec lui la complication de la surface, il suffirait d'augmenter a et b, c'est-à-dire, d'employer des spirales plus lentes et des cercles plus grands par rapport au rayon vecteur de leur centre.

A ces points d'intersection des circonférences méridiennes correspondent 2N gouttières, à savoir N au dessus de l'équateur, et N au dessous. Il existe cependant 4N intersections du eercle central par ses 2N *satellites*, mais elles se trouvent associées deux par deux sur la même droite de latitude, qui coupe nécessairement deux fois chaque cercle. Elles sont dès lors traversées toutes les deux par la même cônhélice. Elle rencontre une première fois le cercle central sur sa gauche en son croisement avec un plus petit que lui, puis une seconde fois, en

---

[1] Sauf lorsqu'on arrive à la limite jusqu'au nautile équiradial : $B = 1$, $b = \frac{\pi}{2}$.

raison de la similitude, sur sa droite, lorsqu'il joue lui-même le rôle de petit cercle vis à vis d'un plus grand que lui.

Le nombre des gouttières est donc toujours pair. Il existe cependant à cet égard une exception qu'il faut enregistrer. Supposons en effet que l'expression (12) ait précisément pour valeur un nombre entier. On peut alors attribuer à n cette valeur limite elle-même, en outre de tous les nombres entiers inférieurs. Mais c'est toutefois à la condition d'annuler par ce choix spécial le trinôme (11), au lieu de le rendre négatif. On a donc dans ce cas

$$\cos\lambda = 1\,, \qquad \lambda = 0\,.$$

Le rencontre des cercles se fait par conséquent sur l'axe polaire, et ils y sont tangents l'un à l'autre. Au point de vue algébrique on peut assurément voir là une *solution double,* et maintenir par cet artifice le nombre 2N des gouttières. Mais, dans la réalité physique, on n'en aperçoit plus sur la surface que 2N — 1 seulement, à savoir N — 1 cônhélices au dessus de l'équateur, antant en dessous, et une spirale logarithmique qui serpente dans le plan même de symétrie, où elle forme une ligne de *soudure* des spires consécutives entre elles.

Le cas spécial N = 1 marque à cet égard le passage de la seconde catégorie (N° 15) à celle des intersections. La relation (14) devient alors

$$\operatorname{tang} a\,.\,\operatorname{Log}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right) = \pi\,,$$

$$\mathrm{B} = \sin b = \cos\left(2e^{\mathrm{A}\pi}\right).$$

On rencontrera donc un tel nautile *soudé* pour une spirale quelconque, en employant un rapport vectoriel approprié, ou pour un rapport arbitraire avec une spirale convenable.

20. Rentrant maintenant dans le cas général, nous voyons que ces diverses cônhélices séparent la surface nautilienne en 2N zônes, infinies suivant le sens spiraloïde, mais se cloisonnant mutuellement dans la coupe transversale, à la manière des bulles de savon [1].

---

[1] Le résultat changerait à la vérité, s'il s'agissait d'un objet massif dont on n'aperçoit pas l'intérieur, tel qu'un modèle en plâtre. Il n'y a plus alors, de chaque côté de l'équateur, qu'une seule gouttière accessible, serpentant à la superficie du solide.

Nous pouvons entreprendre d'évaluer le nombre des compartiments distincts suivant lesquels se trouve cloisonnée l'aire du *cercle central* par la traversée des *cercles satellites*, de gauche et de droite, qui le coupent en l'accompagnant comme un *cortège* dans son mouvement générateur.

Nous ne compterons essentiellement que pour une unité dans ce cortège l'ensemble des compartiments disposés en série, dont chaque terme vient, après une révolution pendant laquelle il se dilate, se superposer, à son retour, sur le suivant. Ce que nous évaluerons, en un mot, est le nombre de *tubes spiraloïdes* distincts, qui remplissent par leur ensemble la superficie externe engendrée par le cercle central. La plus élevée (fig. 3) des N droites de latitude situées au dessus de l'équateur traverse un

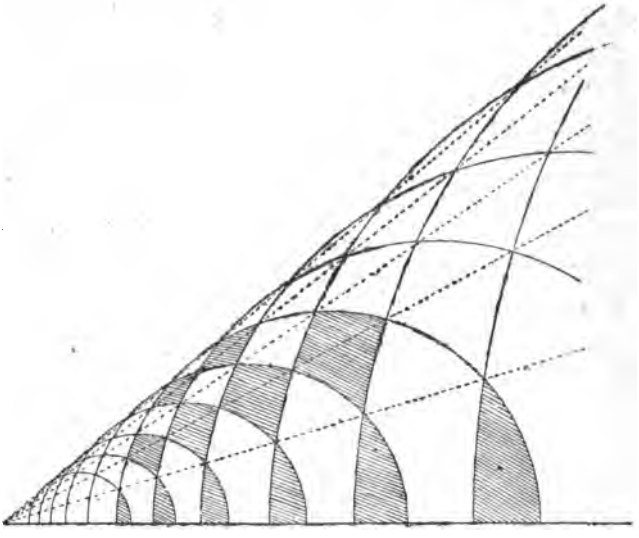

Fig. 3

triangle curviligne unique. Le rayon de rang N — 1 traverse deux *quadrangles curvilignes;* mais ils ne doivent compter que pour une unité se recouvrant elle-même dans la gyration qui lui fait traverser le cercle central. Au rayon N — 2 correspond également un unique quadrangle, qui se recouvre lui même deux fois; et ainsi de suite. Le second rayon à partir de l'équateur fournit encore un dernier quadrangle, qui se recouvre N — 2 fois.

C'est donc, sur le pied d'un seul tube spiraloïde pour chaque rayon de latitude, un total de N — 1 tubes. En vertu de la sy-

métrie, nous en avons tout autant au dessous de l'équateur; soit en tout $2(N-1)$.

Mais il nous reste encore à envisager le premier rayon, aussi bien au dessus qu'en dessous de ce plan. L'une et l'autre de ces deux droites traversent un même *sextangle curviligne,* formé de six arcs de cercle, et se recouvrant lui-même $N-1$ fois dans la gyration. Il ne compte donc ici que pour un seul tube, tant au point de vue des recouvrements successifs que pour les deux côtés de l'équateur.

Il en est de même en ce qui concerne l'axe polaire qui traverse des *biangles curvilignes*, composés chacun de deux arcs de cercle régnant des deux côtés du plan de symétrie. Ce compartiment se recouvre N fois, et l'ensemble ne compte encore que pour une unité. En la joignant à la précédente et aux $2(N-1)$ trouvées ci-dessus, nous obtenons donc un total définitif de 2N tubes.

21. Evaluons de même le nombre des points de croisement de ce réseau.

Nous en trouvons 2 sur le N^c rayon; 3 sur le $(N-1)^c$, 4 sur le $(N-2)^c$, :...., N sur le 2^c, et enfin $N+1$ sur le premier. L'axe polaire ne traverse aucun croisement. Ce total est donc

$$\frac{(N+1)(N+2)}{2}-1=\frac{N(N+3)}{2},$$

mais il en existe autant au dessous de l'équateur, et le chiffre définitif devient

$$N(N+3). \tag{13}$$

22. Enumérons encore les arcs de cercle distincts qui constituent le canevas de ce cloisonnement.

Le premier satellite de gauche présente, à l'intérieur du cercle central, un arc qui tourne sa convexité vers la droite et traverse l'axe polaire; le second, un arc au dessus de cet axe, un au dessous, et un troisième qui le traverse; le troisième satellite donne deux arcs au dessus, deux au dessous, et un cinquième transverse; et ainsi de suite. Le N^c satellite en fournira $2N-1$. On obtient donc la série:

$$1+3+5+7+\ldots+(2N-1)=N^2.$$

Mais les satellites de droite en présentent un nombre égal qui teurnent leur convexité vers la gauche. Et enfin le cercle générateur, pour son propre compte, en possède 4N le long de sa

périphérie complète. Le total est donc

$$N^2 + N^2 + 4N = 2N(N+2).$$

Ce résultat peut servir à controler le précédent (13). En effet en chaque point de croisement se rencontrent deux cercles. Il en part donc quatre *amorces,* à savoir $4N(N+3)$ en tout. Il y a toutefois exception pour les 4N points du cercle central, d'où ne partent que trois amorces, puisque nous ne sortons pas à l'extérieur. Le résultat est donc

$$4N(N+3) - 4N = 4N(N+2).$$

Mais chaque arc de cercle soude l'une à l'autre deux amorces. Leur nombre est donc la moitié de ce dernier, c'est-à-dire égal à celui que nous avons trouvé plus haut.

23. Nous pouvons déterminer les différentes valeurs des angles plans que comprennent entre eux les divers de arcs cercle du cloisonnement.

L'angle des deux circonférences qui ont pour centres C et C′ (fig. 4) est le même que celui CGC′ de leurs normales. Or son

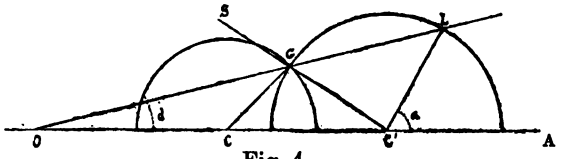

Fig. 4

supplément CGS a pour bissectrice GO d'après la proportion

$$\frac{CG}{CO} = \frac{C'G}{C'O}.$$

On a donc

$$CGC' = \pi - 2(CGO),$$

et d'autre part

$$\frac{\sin CGO}{\sin COG} = \frac{CO}{CG},$$

$$\frac{\sin CGO}{\sin \lambda} = \frac{r}{Br},$$

$$\sin CGO = \frac{\sin \lambda}{\sin b}.$$

Il vient d'après cela

$$\sin CGC' = \sin 2\,(CGO) = 2\,\frac{\sin\lambda}{\sin b}\sqrt{1-\frac{\sin^2\lambda}{\sin^2 b}}$$

$$= \frac{2\sqrt{(1-\cos^2\lambda)(\cos^2\lambda-\cos^2 b)}}{\sin^2 b},$$

expression dans laquelle il suffira de substituer successivement les N valeurs (10) de $\cos\lambda$.

24. Nous pouvons également évaluer les longueurs respectives des divers arcs du cloisonnement.

Ce sont en effet les différences consécutives des arcs tels que $\alpha = AL$, interceptés sur le cercle central entre l'axe polaire OA et les diverses lignes de latitude OL. Or nous avons

$$AC'L - AOL = CL'O = CGO\,,$$

et par conséquent, d'après les valeurs précédentes,

$$\sin(\alpha-\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\sin b}\,.$$

§ IV

Mouvement nautiloïde

25. Le nautile que nous venons d'étudier avec détail : vectoriel, à front méridien, directrice spirale, et génératrice circulaire, n'est pas le seul type que cette analyse nous permette de rattacher à l'aspect extérieur du coquillage de ce nom. Nous en rencontrerons encore d'autres qui se rapprocheront de plus en plus exactement de cette ressemblance : nautiles à front normal, à front oblique, sphéro-nautile. Il sera toutefois inutile de reprendre pour chacun d'eux cette description si complexe.

Revenons pour le moment à une plus grande généralité, et tout en conservant le caractère vectoriel et la spirale logarithmique comme directrice, reprenons une génératrice quelconque (et non plus circulaire), avec une inclinaison frontale constante (mais non plus nulle).

Dans ces conditions, le rayon vecteur OM de la spirale (fig. 1), la tangente en son extrémité, la trace du plan de front, ce plan

lui-même, la ligne génératrice qu'il contient, l'ordonnée N*n* d'un de ses points, ainsi que le rayon vecteur O*n* de la projection équatoriale de ce dernier, constituent ce que j'appellerai un *édifice géométrique,* immuable de forme, conservant sans altération chacun de ses angles pendant le mouvement générateur, mais amplifiant homothétiquement toutes ses dimensions par rapport au centre de similitude M, à l'unisson du rayon vecteur OM, c'est-à-dire suivant une progression géométrique, tandis qu'il tourne d'après une progression arithmétique autour de l'axe zénithal O.

Je regarde comme *fondamentale* pour cet ordre de recherches la conception de cet édifice géométrique, dans lequel nous pourrons successivement, à l'occasion de chacune des questions distinctes, *incruster,* pour en faire partie intégrante, les divers éléments de ces questions, *à la condition essentielle qu'ils relèvent eux mêmes de la similitude,* c'est-à-dire conservent les angles et les rapports de dimensions.

C'est d'ailleurs de cette manière que l'on pourrait, même en géométrie plane pour l'étude de la spirale logarithmique, tout faire dépendre de la similitude de la figure élémentaire constituée par deux rayons vecteurs infiniment voisins avec les tangentes menées sous un angle immuable en leurs extrémités. La considération de cet *édifice plan*, auquel on rattacherait chaque fois les éléments des diverses questions qui ont été traitées sur cette belle courbe, me parait être la *raison profonde* de tant de remarquables propriétés, et de son extraordinaire persistance à se reproduire toujours la même [1], toutes les fois que l'on exécute sur elle des constructions dépendant uniquement de la similitude; au point que cette incessante réapparition finit par devenir en quelque sorte banale, et fatigante par son élégance même.

Il convient, d'après ces vues, de commencer par approfondir les propriétés générales du *mouvement nautiloïde* de cet édifice, c'est-à-dire en définitive d'une figure quelconque. On ne rencontre pas cette étude dans la cinématique classique, par la raison que celle-ci n'envisage que des solides invariables, tandis qu'il s'agit essentiellement ici de figures déformables.

26. Considérons (fig. 5) le déplacement d'une droite quelconque de longueur finie, depuis une position PQ jusqu'à une

---

[1] *Eadem mutata resurgo* (Jacques Bernoulli).

autre P'Q', avec changement d'orientation et de grandeur tout à la fois.

Nous allons reconnaitre qu'une pareille transposition peut toujours être effectuée par un *mouvement nautiloïde,* c'est-à-dire en faisant décrire par P et Q, autour d'un même pôle O, deux angles égaux, en parcourant deux spirales logarithmiques PP', QQ', donées d'un même angle caractéristique a.

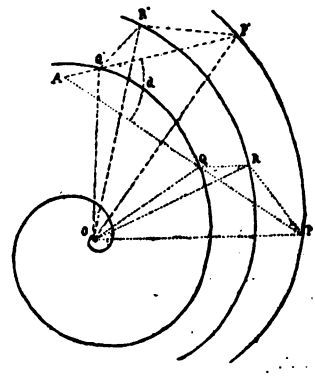

Fig. 5

L'angle $\alpha = POP'$ dont tournent à la fois les trois côtés du triangle inconnu OPQ pour venir, avec dilatation, occuper l'emplacement OP'Q' nous est immédiatement connu en

$$\alpha = PAP'.$$

Il doit d'ailleurs satisfaire aux relations

$$e^{\alpha \operatorname{cotg} a} = \frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{P'Q'}{PQ},$$

dont le dernier membre nous est également donné. L'angle caractéristique a des spirales se trouve ainsi déterminé.

D'autre part, on voit que le point O appartient nécessairement à deux segments capables de l'angle α, décrits respectivement sur PP' et QQ'. Il se trouve donc lui-même déterminé [1].

27. Supposons maintenant qu'une figure quelconque se meuve dans son propre plan d'une manière arbitraire, mais sous la condition de rester semblable à elle même; et analysons les circonstances de son déplacement instantané.

Cette figure, quelle qu'elle soit, se trouvera complètement déterminée par une de ses droites PQ. En effet, appelons R un quelconque de ses points. On peut le rattacher à cette droite par un triangle PQR qui devra rester semblable à lui-même,

---

[1] C'est d'ailleurs sans aucune ambiguité, bien que deux cercles se coupent en deux points, car on sait que la seconde se rapporte aux segments capables de l'angle supplémentaire $\pi - \alpha$, et non plus α.

et que l'on saura par suite construire en P'Q'R' une fois que l'on counaitra la seconde position P'Q' de PQ.

Or cette droite peut être amenée en P'Q' par un mouvement nautiloïde d'un certain pôle O et d'un angle caractéristique *a*. Dès lors, dans le triangle OPR (fig. 5), qui devient OP'R', le rayon vecteur OR tourne jusqu'en OR', du même angle que OP pour venir en OP', puisque l'angle ROP = R'OP'. De plus le rapport de OR à OR' est le même que celui de OP à OP', d'après la similitude de ces triangles. Le point R parvient donc en R' par une spirale de même pôle et de même angle. De là se dégage la conclusion suivante :

Dans le mouvement instantané d'une figure plane qui se déforme en restant semblable à elle-même, les divers points se déplacent le long de spirales logarithmiques égales et de même pôle.

28. Tous les points s'échappent donc simultanément de leurs positions actuelles avec des vitesses proportionnelles à leurs distances au pôle et sous le même angle par rapport à ces rayons vecteurs.

On peut dès lors décomposer ces vitesses suivant le rayon et sa perpendiculaire à l'aide de triangles rectangles semblables entre eux, dont les composantes respectives seront dès lors toutes proportionnelles. En d'autres termes, un mouvement élémentaire de similitude peut toujours être décomposé en deux autres : 1° une rotation sans déformation autour d'un pôle instantané ; 2° une déformation homothétique par rapport à ce pôle sans rotation (1).

Si l'on fait connaitre la direction des vitesses de deux points, ainsi que le rapport de leurs deux composantes, la valeur de ce dernier fait connaitre l'angle caractéristique des spirales. Si alors on trace deux rayons formant cet angle avec les directions des vitesses, ils détermineront par leur intersection le pôle instantané.

Une fois celui-ci connu, l'on en déduira pour tout autre point la direction de sa vitesse, en menant son rayon vecteur et faisant avec lui l'angle en question. Si l'une des deux vitesses est en outre donnée en grandeur, on obtiendra par proportion toutes les autres.

---

(1) Lorsque la figure reste indéformable, la seconde composante disparait, et l'on retrouve le théorème du centre instantané de rotation de la cinématique classique.

29. Après ce déplacement des points, envisageons celui des droites liées à la figure qui est animée d'un mouvement nautiloïde.

Traçons une quelconque des spirales décrites par les points de l'édifice géométrique (fig. 6). La droite considérée DD′ la rencontre en M sous un certain angle b. Soient r, θ les coordonnées de ce point, et R, ω celles d'un point quelconque N de la droite. Abaissons la perpendiculaire OP. Pour établir l'équation de DD′ nous écrivons

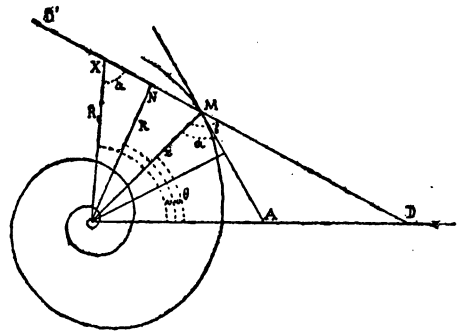

Fig. 6

$$\mathrm{NO} \,.\, \cos \mathrm{NOP} = \mathrm{OP} = \mathrm{MO} \,.\, \cos \mathrm{MOP},$$

$$\mathrm{NOP} = \omega - \left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - b\right)\right] = \frac{\pi}{2} - (\theta - \omega + b),$$

$$\mathrm{MO} \,.\, \cos \mathrm{MOP} = r \sin \mathrm{OMP},$$

et finalement

$$\mathrm{R} \sin(\theta - \omega + b) = e^{\mathrm{A}\theta} \sin b. \tag{14}$$

La recherche de l'enveloppe de cette droite se fera en éliminant le paramètre θ entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à lui

$$\mathrm{R} \cos(\theta - \omega + b) = \mathrm{A} e^{\mathrm{A}\theta} \sin b. \tag{15}$$

On en déduit

$$\operatorname{tang}(\theta - \omega + b) = \frac{1}{\mathrm{A}} = \operatorname{tang} a,$$

$$\theta = \omega + a - b,$$

d'où, en reportant cette valeur dans l'équation (14)

$$\mathrm{R} = \frac{\sin b}{\sin a} e^{\mathrm{A}(a-b)} \,.\, e^{\mathrm{A}\omega}.$$

On y reconnait une spirale identique à toutes les trajectoires, mais déviée par rapport à celle du point M de l'angle

$$\Delta = \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{Log}\left[\frac{\sin b}{\sin a} e^{A(a-b)}\right].$$

30. Quant au point de contact X de la droite avec son enveloppe, il est fourni par l'intersection de cette ligne avec sa position infiniment voisine. Ses coordonnées seront donc données par les deux équations (14) et (15). Or nous avons déja trouvé par leur élimination

$$\omega_0 = \theta + a - b,$$

et il en résulte

$$R_0 = r\,\frac{\sin b}{\sin a}.$$

On peut même se dispenser de ce calcul en remarquant qu'il suffit de mener par le pôle une droite OX faisant avec DD′ l'angle a, puisque cette droite jouera en X le rôle de rayon vecteur, et DD′ celui de tangente de la spirale logarithmique.

31. Imaginons maintenant une figure à trois dimensions dont la trace équatoriale se trouve animée dans son plan d'un mouvement nautiloïde. Le déplacement dans l'espace restera gouverné par les propriétés précédentes.

La seule modification dans les énoncès (mais elle est essentielle) consiste en ce que les trajectoires des points qui restent homologues, au lieu d'être comme ci-dessus des spirales logarithmiques, deviennent des cônhélices. En effet, pour chacune d'eux l'altitude z s'amplifie dans le même rapport que R, puisque tout l'édifice géométrique conserve sans altération ses divers rapports de dimensions. Il en sera dès lors de même de l'angle que fait cette droite avec l'horizon, à la surface du cône de latitude sur lequel elle se trouve tracée.

§ V

Equation des surfaces nautiloïdes

32. On peut, d'une manière générale, ramener au type du nautiloïde à front méridien la surface engendrée par le mouve-

ment nautiloïde d'une ligne quelconque S, plane ou gauche, liée comme édifice géométrique au rayon vecteur d'une spirale logarithmique.

En effet chacun de ses points parcourt dans l'espace une cônhélice, et la surface engendrée se trouve entièrement sillonnée du système de ces trajectoires. Coupons la par un plan méridien, et soit s la section. Lions cette ligne plane au rayon OM et à la courbe S; puis recommençons le mouvement nautiloïde de cet édifice ainsi complété. Les divers points de s devront pour cela décrire des cônhélices qui sont complètement déterminées par la spirale directrice, et ne sauraient par suite différer de l'ensemble précédent. La surface nautiloïde sera donc susceptible de ce nouveau mode de génération (s), aussi bien que du premier (S).

33. Or, sous cette forme simplifiée, il nous est facile de former l'équation générale de cette famille de surfaces.

Nous avons en effet trouvé pour une surface *quelconque* à front méridien (5)

$$R = F(\omega) + \varphi(\omega) f\left[\frac{z}{\varphi(\omega)}\right].$$

Si la directrice est une spirale logarithmique, il vient

$$R = e^{A\omega} + \varphi(\omega) f\left[\frac{z}{\varphi(\omega)}\right].$$

Si de plus la surface est vectorielle, nous remplaçons φ par le rayon vecteur

$$R = e^{A\omega}\left[1 + f(ze^{-A\omega})\right].$$

Mais il devient dès lors inutile de conserver en évidence la trace de la fonction f, et nous pouvons remplacer par ϕ le symbole $1 + f$ de fonction arbitraire, ce qui donne plus simplement

$$(16) \qquad R = e^{A\omega}\,\phi(ze^{-A\omega}).$$

Telle est l'équation d'un nautiloïde quelconque ayant pour génératrice, dans le premier méridien ($\omega = 0$), le profil

$$R = \phi(z).$$

On peut également lui donner une seconde forme, en désignant par Ψ la fonction inverse de ϕ. La méridienne initiale

devient alors

$$z = \Psi(R),$$

et l'équation de la surface

$$z = e^{A\omega}\Psi(Re^{-A\omega}). \tag{17}$$

34. On sait que les familles classiques de surfaces dont l'équation générale renferme une fonction arbitraire peuvent être caractérisées chacune par une équation différentielle partielle unique du premier ordre. Il nous est aisé de formuler celle des nautiloïdes.

La relation (17) donne, en la différentiant par rapport à R

$$ze^{-A\omega} = \Psi(Re^{-A\omega}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial R}e^{-A\omega} = e^{-A\omega}.\Psi'(Re^{-A\omega}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial R} = \Psi'(Re^{-A\omega});$$

et d'autre part, en différentiant relativement à ω

$$e^{-A\omega}\frac{\partial z}{\partial \omega} - Aze^{-A\omega} = (-ARe^{-A\omega})\Psi'(Re^{-A\omega}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} - Az = -AR\Psi'(Re^{-A\omega}),$$

d'où l'on déduit

$$R\frac{\partial z}{\partial R} + \frac{\partial z}{\partial \omega}\operatorname{tang} a = z. \tag{18}$$

Telle est l'équation cherchée [1].

35. Il est facile, au moyen du changement de variables, de

---

[1] Il ne saurait être question d'élever l'objection qu'un changement de coordonnées relevant le plan horizontal, aurait pour effet de modifier le second membre sans changer le premier. Cette analyse suppose en effet essentiellement que le plan de l'équateur passe par les centres de similitude, et se trouve ainsi absolument déterminé.

la transcrire dans le système rectangulaire

$$(x\cos a - y\sin a)\frac{\partial z}{\partial x} + (x\sin a + y\cos a)\frac{\partial z}{\partial y} = z\cos a\,.$$

On peut également écrire, en introduisant la longitude ω

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos(\omega + a) + \frac{\partial z}{\partial y}\sin(\omega + a) = \frac{z}{R}\cos a\,.$$

D'ailleurs les quantités $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}$ représentent les inverses $\frac{1}{S_x}$, $\frac{1}{S_y}$ des sous-tangentes des sections faites par des plans parallèles aux plans verticaux de coordonnées. Nous écrirons donc

$$\frac{\cos(\omega + a)}{S_x} + \frac{\sin(\omega + a)}{S_y} = \frac{\cos a}{R}\,.$$

Associons (fig. 7) au plan méridien ZOn du point N de la surface, la seconde face ZOA d'un dièdre *immuable* a, et prenons sa trace équatoriale OA comme axe de projections. Cette dernière relation s'interprète alors de la manière suivante:

Dans toute surface nautiloïde, la projection sur l'axe ainsi défini de l'inverse du rayon vecteur On est la somme des projections des inverses des sous-tangentes des sections faites par deux plans méridiens rectangulaires quelconques [1].

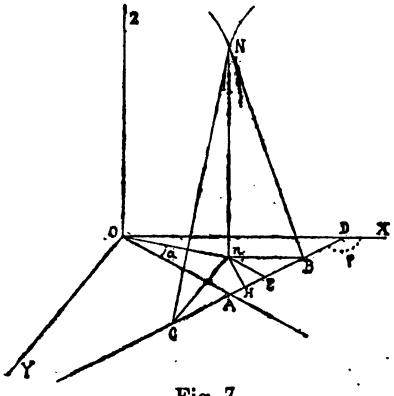

Fig. 7

Mentionnons encore une autre interprétation de l'équation différentielle partielle. La droite BC qui joint les extrémités des sous-tangentes nB, nC n'est autre que la trace du plan tangent en N, qui doit contenir toutes les tangentes à la surface. En

(1) Car on peut toujours adopter des plans coordonnés qui leur soient parallèles.

appelant φ l'angle que fait cette droite avec la partie positive de l'axe des abscisses, et h la hanteur nH du triangle nBC, nous aurons

$$S_x = \frac{h}{\sin\varphi}, \qquad S_y = -\frac{h}{\cos\varphi},$$

d'où par conséquent

$$\cos(\omega + a)\sin\varphi - \sin(\omega + a)\cos\varphi = \frac{h}{R}\cos a,$$

$$\frac{R}{\cos a} = \frac{h}{\sin[\varphi - (\omega + a)]} = \frac{h}{\sin(ADX - AOX)} = \frac{h}{\sin OAD}.$$

Menons par n la parallèle nE à l'axe OA, il nous viendra

$$\frac{On\,.}{\cos nOA} = \frac{nH}{\sin nEA},$$

ou enfin, en élevant en n la perpendiculaire nF au rayon vecteur

$$OF = nE.$$

De là cet énoncé:

La portion de l'axe OA qui se projette orthogonalement sur le rayon vecteur On est égale à la distance de ce point n à la trace du plan tangent en N comptée parallèlement à cet axe OA.

36. On envisage d'ordinaire, pour les familles de surfaces, deux problèmes généraux, qui consistent à faire passer une surface de cette catégorie par une courbe donnée ou à en circonscrire une à une surface assignée. Nous pouvons tracer la marche propre à résoudre ces questions en ce qui concerne les nautiloïdes.

Pour la première, nous commencerons par ramener les équations de la courbe donnée à la forme

$$z = F_1(R), \qquad R = F_2(\omega).$$

La première est celle de la surface de révolution qu'elle décrirait en tournant autour de l'axe zénithal; la seconde celle du cylindre qui la projette sur le plan équatorial.

En substituant ces valeurs dans l'équation générale des nautiloïdes (16), il vient

$$F_2(\omega) = e^{A\omega} \int \{e^{-A\omega} \,.\, F_1[F_2(\omega)]\}.$$

Envisageons comme une variable auxiliaire μ la quantité subordonné à la fonction inconnue ϕ

$$\mu = e^{-A\omega} F_1 [F_2 (\omega)],$$

et résolvons cette relation sous la forme

$$\omega = F_3 (\mu),$$

il viendra

$$\phi (\mu) = e^{-AF_3(\mu)} . F_2 [F_3 (\mu)],$$

ce qui détermine la fonction qui permettra d'écrire l'équation du nautiloïde.

37. Proposons nous en second lieu de circonscrire un nautiloïde à la surface

$$(19) \qquad F_4 (R, \omega, z) = 0.$$

En leurs divers points de contact, les coefficients différentiels $\frac{\partial z}{\partial R}$, $\frac{\partial z}{\partial \omega}$ seront les mêmes pour toutes les deux. Or, sur la proposée, ils prennent les valeurs

$$\frac{\partial z}{\partial R} = -\frac{\frac{\partial F_4}{\partial R}}{\frac{\partial F_4}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \omega} = -\frac{\frac{\partial F_4}{\partial \omega}}{\frac{\partial F_4}{\partial z}}.$$

Pour le nautiloïde, ils doivent satisfaire à l'équation différentielle partielle (18), qui deviendra par cette substitution

$$R \frac{\partial F_4}{\partial R} + \tang a \frac{\partial F_4}{\partial \omega} + z \frac{\partial F_4}{\partial z} = 0.$$

Nous obtiendrons ainsi, en joignant cette égalité à la formule (19), les deux équations de la courbe de contact.

Il suffit dès lors de la prendre comme directrice pour rentrer dans les conditions du problème précédent (N° 36).

§ VI

Plan tangent

38. Revenons maintenant aux surfaces à front générateur de directrice et de génératrice quelconques, en les supposant encore vectorielles et d'inclinaison frontale constante, pour nous proposer la recherche de leur plan tangent. Nous le considérerons comme déterminé par la tangente de la ligne de latitude constante, et par celle de la génératrice. Envisageons successivement ces deux droites.

Je rappelle (N° 8) que, dans ces conditions, la ligne de latitude a pour projection équatoriale une courbe semblable à la directrice. Le rayon vecteur $R = On$ de cette projection (fig. 8) reste donc proportionnel à $r = OM$, et la tangente nt fait avec lui un angle $Ont = OMT$. Nous savons d'après cela construire en nt la projection de la tangente de la ligne de latitude.

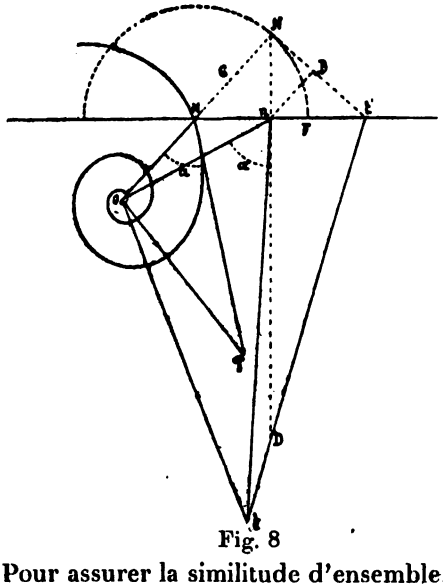

Fig. 8

Nous en pouvons également déterminer la trace t, c'est-à-dire la sous-tangente $S = nt$. En effet l'altitude z de N devient $z + dz$ par un mouvement élémentaire amenant ce point en N'. En même temps r et R acquièrent les valeurs $r + dr$, $R + dR$. Pour assurer la similitude d'ensemble, ces divers accroissements doivent se régler conformément aux proportions

$$\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} = \frac{dR}{R}.$$

Or la sous-tangente S est donnée par la relation

$$\frac{S}{z} = \frac{nn'}{dz}.$$

Mais on a d'un autre côté

$$\frac{nn'}{MM'} = \frac{R}{r}, \qquad \frac{dz}{dr} = \frac{z}{r},$$

et par conséquent

$$(20) \qquad S = R \cdot \frac{MM'}{dr} = \frac{R}{r}\left(r\frac{MM'}{dr}\right).$$

Si l'on appelle T la longueur MT interceptée sur la tangente de la directrice par la perpendiculaire élevée à partir du pôle sur son rayon vecteur OM, elle sera fournie par la proportion

$$\frac{T}{r} = \frac{MM'}{dr}.$$

Il vient donc

$$S = \frac{R}{r}T.$$

Or il nous suffit d'élever en O la perpendiculaire Ot sur le rayon vecteur On de la projection n pour constituer en Ont un triangle semblable à OMT. C'est par conséquent la longueur nt ainsi interceptée sur la tangente qui mesurera la sous-tangente S, et fournira en t la trace de la tangente à la trajectoire de N dans l'espace (1).

Indépendamment de cette construction géométrique, nous possédons également (20) l'expression analytique de cette sous tangente sous la forme

$$(21) \qquad S = R\sqrt{1 + \frac{r^2 d\theta^2}{dr^2}} = R\sqrt{1 + \frac{F^2}{F'^2}}.$$

39. Si l'on veut déterminer le lieu géométrique de ces traces t pour une cônhélice, il suffit de remarquer que le rayon vecteur Ot reste proportionnel à R, et par suite à z; qu'en outre il est séparé de ce dernier par l'angle constant MOn

(1) Remarquons à cette occasion que cette construction des angles OMT, Ont, tous égaux entre eux pour les divers points n du front FF' est bien conforme à la loi trouvée ci-dessus (N° 29) pour le mouvement instantané d'une figure qui reste semblable à elle-même.

augmenté d'un quadrant. Ce lieu est donc semblable à la directrice.

On peut exprimer autrement ce résultat. Concevons en effet les surfaces développables qui ont pour arêtes de rebroussement les diverses lignes de latitude et sont formées par l'ensemble des tangentes de chacune d'elles. Ces surfaces auront toutes, d'après ce qui précède, leur trace équatoriale semblable à la directrice.

40. Envisageons en second lieu la tangente Nt' de la génératrice. Elle doit, au point de vue graphique, être considérée comme directement connue.

Nous en possédons en outre le détermination analytique, d'après le valeur S' de la sous-tangente nt' qu'elle intercepte sur la trace du plan de front. Elle est fournie par la proportion

$$\frac{S'}{z} = \frac{d\xi}{dz}.$$

Si donc nous différentions l'équation (1) de la génératrice entre ξ et z, en considérant θ et r comme des paramètres constants, l'on pourra écrire

$$S' = zf'\left(\frac{z}{r}\right). \tag{22}$$

41. La trace du plan tangent s'obtient en joignant celles des deux tangentes précédentes, c'ast-à-dire en tirant tt'. La figure (8) devient ainsi, à proprement parler, une épure, très élémentaire, de géométrie descriptive, ayant pour ligne de terre la trace du front FF'. Le plan tangent s'y trouve représenté, suivant le mode ordinaire, par ses deux traces $t't$ et $t'N$.

La normale le sera de son coté par les perpendiculaires nB, NC abaissées des projections N, n du point de contact sur les traces du plan.

Nous pouvons exprimer analytiquement les angles h, v compris entre les traces horizontale et verticale du plan tangent et celle du front; ainsi que les dièdres H, V que forme ce dernier avec les plans de l'équateur et du front.

On a en premier lieu dans le triangle Nnt'

$$\operatorname{tang} v = \frac{z}{S}$$

Il vient ensuite dans le triangle ntt'

$$\frac{\sin nt't}{nt} = \frac{\sin ntt'}{nt'},$$

c'est-à-dire

$$\sin h = \frac{S}{S'} \sin (Mnt - h).$$

Or on peut écrire

$$Mnt = \left(\frac{\pi}{2} - i\right) + [i - (\theta - \omega)] = \frac{\pi}{2} - (\theta - \omega),$$

et par conséquent

$$\sin h = \frac{S}{S'} \cos (\theta - \omega + h),$$

$$\frac{S'}{S} \sin h = \cos (\theta - \omega) \cos h - \sin (\theta - \omega) \sin h.$$

Mais d'ailleurs

$$\frac{\sin (\theta - \omega)}{Mn} = \frac{\sin OMn}{On},$$

$$\sin (\theta - \omega) = \frac{\xi}{R} \sin i.$$

Nous avons donc en définitive

$$\tang h = \frac{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{R^2} \sin^2 i}}{\frac{S'}{S} + \frac{\xi}{R} \sin i} = \frac{S\sqrt{R^2 - \xi^2 \sin^2 i}}{S'R + S\xi \sin i}.$$

Quant aux angles dièdres, il nous vient par les formules de la trigonométrie sphérique appliquées au trièdre rectangle $t'nNt$

$$\tang H = \frac{\tang v}{\sin h}, \qquad \tang V = \frac{\tang h}{\sin v}.$$

On peut d'ailleurs obtenir cette même détermination d'après les triangles rectangles *de l'espace* DnE, NnB.

42. Ces diverses formules étant homogènes par rapport a des quantités qui restent elles-mêmes proportionnelles le long d'une même trajectoire de latitude constante, on voit que les quatre angles ainsi déterminés restent de leur côté invariables sur ce parcours.

Remarquons notamment que le plan tangent conservant une inclinaison constante sur l'horizon, enveloppe le long de cette trajectoire une *surface-talus*, telle que les contreforts géologiques que dessinent les anciens éboulis sur le flanc des montagnes.

43. Si l'on se donne directement les uns ou les autres des quatre angles h, v, H, V, on pourra constituer ainsi différents modes de détermination du plan tangent d'après ces diverses données. Nous possédons leurs valeurs en fonction de S, S', ξ, R, z. Mais nous avons d'ailleurs en fonction de θ celles (21), (22), de S, S', ainsi que (1) de ξ.

Or nous pouvons déterminer, pour un point N(R, ω, λ) de la surface, le point M(r, θ) de la directrice par lequel passe le plan de front de N. En d'autres termes, nous avons à évaluer θ en fonction de R, ω, λ.

Le triangle MOn nous donne à cet effet

$$\frac{\sin \mathrm{MO}n}{\mathrm{M}n} = \frac{\sin \mathrm{OM}n}{\mathrm{O}n},$$

$$\sin(\theta - \omega) = \xi \frac{\sin i}{\mathrm{R}} = \frac{\sin i}{\mathrm{R}} . rf\left(\frac{z}{r}\right),$$

et par conséquent:

$$\mathrm{R} \sin(\theta - \omega) = \sin i . \mathrm{F}(\theta) f\left[\frac{z}{\mathrm{F}(\theta)}\right],$$

équation à résoudre dans chaque cas par rapport à θ, lorsque seront spécifiées les fonctions F et f.

44. Nous pouvons finalement représenter le plan tangent par son équation en coordonnées rectangulaires X, Y, Z. Nous le considérerons à cet effet comme déterminé par les trois points N, t, t'.

J'appelle x_1, y_1; x_2, y_2 les coordonnées de ces deux traces dans le plan équatorial. Le droite tt' aura pour équation

$$(\mathrm{Y} - y_1)(x_2 - x_1) = (\mathrm{X} - x_1)(y_2 - y_1).$$

Celle du plan lui-même sera donc de la forme

$$(Y - y_1)(x_2 - x_1) - (X - x_1)(y_2 - y_1) = mZ,$$

et le coefficient inconnu m se déterminera en obligeant ce plan à passer par N, ce qui donne

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (X - x_1)(y_2 - y_1) = mz.$$

En divisant membre à membre, nous obtiendrons donc l'équation du plan tangent. Il suffit par conséquent de connaitre les quatre coordonnées x_1, y_1; x_2, y_2.

On a pour le point t

$$x_1 = Ot \cos tOA = On \operatorname{tang} Ont \sin nOA,$$

$$y_1 = Ot \sin tOA = On \operatorname{tang} Ont \cos nOA.$$

Mais l'angle Ont que comprennent la tangente et le rayon vecteur est le même pour les deux courbes semblables (n) et (M) (N° 8). Il vient donc

$$\operatorname{tang} Ont = \frac{F}{F'},$$

et par conséquent

$$x_1 = R\frac{F}{F'}\sin\omega = \frac{F}{F'}y, \qquad y_1 = R\frac{F}{F'}\cos\omega = \frac{F}{F'}x.$$

Nous avons d'autre part en ce qui concerne le point t'

$$x_2 = R\cos\omega + S'\cos(\theta - i) = x + zf'\left(\frac{z}{F}\right)\cos(\theta - i),$$

$$y_2 = R\sin\omega + S'\sin(\theta - i) = y + zf'\left(\frac{z}{F}\right)\sin(\theta - i).$$

On remplacera θ ainsi qu'il vient d'être dit (N° 43), et l'on aura, entre les coordonnées X, Y, Z, l'équation du plan tangent au point (x, y, z).

45. Cette théorie convient en particulier à la famille des nautiloïdes de génératrice quelconque. Il s'opère alors quelques simplifications.

Les projections des trajectoires, que nous savons être tou-

jours semblables à la directrice, lui deviennent maintenant égales, avec des déviations variées. La sous-tangente de cette cônhélice est alors égale à l'arc de la spirale logarithmique qui en est la projection, compté à partir du pôle. Les traces des surfaces-talus circonscrites au nautiloïde suivant ses cônhélices sont elles-mêmes des spirales logarithmiques égales mais déviées.

§ VII

Nautile à front normal

46. Le nautile que nous avons étudié en détail (§ III), présente sa section circulaire dans le plan méridien. Pour obtenir un type convenablement rapproché du genre *Nautilus*, tel que nous l'offre la conchyliologie, cette solution peut avoir quelque intérêt si l'angle a est suffisamment voisin du quadrant, c'est-à-dire la spirale logarithmique assez *lente*. Mais à coup sûr l'assimilation échouerait avec une directrice *rapide*. Cette première solution reste donc entachée d'une certaine insuffisance.

Pour nous en affrauchir nettement, nous substituerons à la condition du front méridien ($i = 0$) celle du front normal

$$i = \frac{\pi}{2} - a.$$

Dans ce but, nous commencerons par reprendre, avec cette nouvelle détermination de i, une entière généralité, c'est-à-dire une directrice F, une génératrice f, et une loi de similitude φ arbitraires.

47. La position normale nous donne

$$\operatorname{tang} i = \cot a = \frac{F'}{F}.$$

L'équation (2) de la trace du front devient donc

$$R\left[\sin(\omega - \theta)\cos i + \cos(\omega - \theta)\sin i\right] = F \sin i,$$

ou, en remplaçant $\sin i$ et $\cos i$ par les quantités proportionnelles F′ et F

$$(23) \qquad R\left[F \sin(\omega - \theta) + F' \cos(\omega - \theta)\right] = FF'.$$

D'autre part la relation (3) prend la forme

$$(24)\quad R^2 = F^2 + \frac{2F^2\varphi}{\sqrt{F^2+F'^2}} f\left(\frac{R \operatorname{tang}\lambda}{\varphi}\right) + \varphi^2 f^2\left(\frac{R \operatorname{tang}\lambda}{\varphi}\right).$$

Il n'y aura dès lors, pour obtenir en R, ω, λ, l'équation de la surface qu'a éliminer entre ces deux formules le paramètre θ compris sous les symboles F et φ.

48. Considérons comme application l'*anneau variable* engendré par une *génératrice quelconque* f avec une *loi de similitude également arbitraire* φ lorsque la directrice est un cercle passant par le pôle

$$r = \cos\theta.$$

La relation (23) nous donne alors

$$R[\sin(\omega-\theta)\cos\theta - \cos(\omega-\theta)\sin\theta] = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$R\sin(\omega-2\theta) = -\frac{1}{2}\sin 2\theta,$$

$$R(\sin\omega\cos 2\theta - \cos\omega\sin 2\theta) + \frac{1}{2}\sin 2\theta = 0,$$

$$\left(R\cos\omega - \frac{1}{2}\right)\operatorname{tang} 2\theta = R\sin\omega,$$

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2R\sin\omega}{2R\cos\omega - 1}\right).$$

D'autre part la formule (24) devient

$$R^2 = \cos^2\theta\left\{1 + 2\varphi(\theta) f\left[\frac{R \operatorname{tang}\lambda}{\varphi(\theta)}\right]\right\} + \varphi^2(\theta) f^2\left[\frac{R \operatorname{tang}\lambda}{\varphi(\theta)}\right].$$

L'élimination se trouve donc faite une fois pour toutes, dans ces conditions de complète généralité, par la substitution de la valeur précédente de θ [1].

---

[1] Il est essentiel de ne pas confondre cet anneau variable à front *normal* avec l'anneau variable à front *méridien* que nous obtiendrions en remplaçant, dans l'équation générale (S), le symbole $F(\omega)$ par $\cos\omega$.

49. Arrivons, comme seconde application, au *nautile à section normale circulaire*, en supposant a constant.

L'équation (23) de la trace du front devient alors

$$(25) \qquad R\cos(\theta - \omega + a) = e^{A\theta}\cos a\,.$$

La génératrice devenue un cercle de rayon Br sera représentée par la formule

$$(26) \qquad \xi = \sqrt{B^2r^2 - z^2} = \sqrt{B^2e^{2A\theta} - R^2\tang^2\lambda}\,.$$

La relation (24) nous donne d'après cela

$$R^2 = e^{2A\theta} + (B^2e^{2A\theta} - R^2\tang^2\lambda) + 2e^{A\theta}\sin a\sqrt{B^2e^{2A\theta} - R^2\tang^2\lambda}\,,$$

$$R^2(1+\tang^2\lambda) - (B^2+1)e^{2A\theta} = 2e^{A\theta}\sin a\sqrt{B^2e^{2A\theta} - R^2\tang^2\lambda}\,,$$

$$\left[\frac{R^2}{\cos^2\lambda} - (B^2+1)e^{2A\theta}\right]^2 = 4e^{2A\theta}\sin^2 a\,(B^2e^{2A\theta} - R^2\tang^2\lambda)\,,$$

ou en développant

$$[(B^2+1)^2 - 4B^2\sin^2 a]\,e^{4A\theta}$$
$$-\left[\frac{2(B^2+1)R^2}{\cos^2\lambda} - 4R^2\sin^2 a\tang^2\lambda\right]e^{2A\theta} + \frac{R^4}{\cos^4\lambda} = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$(B^4 + 2B^2\cos 2a + 1)\left(\frac{e^{A\theta}\cos\lambda}{R}\right)^4$$
$$-2\,[B^2 + 1 - (1-\cos 2a)\sin^2\lambda]\left(\frac{e^{A\theta}\cos\lambda}{R}\right)^2 + 1 = 0\,.$$

Pour simplifier, représentons par c^2 la constante

$$(27) \qquad c^2 = B^4 + 2B^2\cos 2a + 1\,,$$

qui ne dèpend que de A et B, c'est-à-dire a et b. Employons de même l'abréviation Λ pour désigner la fonction de la latitude λ qui forme le second coefficient de l'équation bicarrée

$$(28) \qquad \Lambda = \sin^2\lambda\cos 2a + \cos^2\lambda + \sin^2 b\,;$$

cette dernière prend alors la forme très simple

$$c^2\left(\frac{e^{A\theta}\cos\lambda}{R}\right)^4 - 2\Lambda\left(\frac{e^{A\theta}\cos\lambda}{R}\right)^2 + 1 = 0,$$

et donne par sa résolution

$$\left(\frac{e^{A\theta}\cos\lambda}{R}\right)^2 = \frac{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 - c^2}}{c^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{ce^{A\theta}\cos\lambda}{R} = \sqrt{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 - c^2}}.$$

Or il arrive précisément que ces radicaux superposés remplissent la condition qui rend possible leur décomposition en radicaux simples

$$c\sqrt{2}\cos\lambda\,\frac{e^{A\theta}}{R} = \sqrt{\Lambda + c} \pm \sqrt{\Lambda - c}.$$

On en déduit pour exprimer, soit r, soit θ, les deux formules

$$\frac{e^{A\theta}}{R} = \frac{\sqrt{\Lambda + c} \pm \sqrt{\Lambda - c}}{\sqrt{2}\,c\cos\lambda},$$

$$(29) \qquad \theta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log}\left[\frac{R}{\sqrt{2}\,c\cos\lambda}\left(\sqrt{\Lambda + c} \pm \sqrt{\Lambda - c}\right)\right].$$

Il suffit maintenant de les substituer dans la relation (25), en restituant en même temps aux abréviations Λ et c leurs significations respectives (28) et (27), pour obtenir, entre R, ω, λ, l'équation du *nautile à front normal circulaire.*

50. En y faisant $\omega = 0$, on obtiendra entre R et λ, ou R et z, l'équation de la courbe capable d'engendrer ce même nautile comme surface nautiloïde *à front méridien* (N° 32).

Si l'on coupe au contraire par un cône de latitude, λ devient constante, ainsi que Λ. L'exponentielle est alors proportionnelle à R, qui disparaît de l'équation (25); mais il reparaît par la substitution de la valeur (29) de θ. La formule exprime alors que ω est, sauf une constante, égal à Log R, ce qui est l'équation de la spirale logarithmique. Nous savons en effet que telle est la projection de la cônhélice.

Nous obtenons de plus les conditions de la réalité de cette intersection. Il nous faut en effet poser, pour assurer celle du second radical

$$\Lambda > c,$$

c'est-à-dire

$$\sin^2\lambda\cos 2a + \cos^2\lambda + B^2 - c > 0.$$

Si le cône de latitude commence par être très ouvert dans le voisinage de l'équateur, λ s'écarte peu de 90 degrés, et cette expression de

$$\cos 2a + B^2 - c,$$

quantité négative. On a en effet

$$(\cos 2a + B^2)^2 = B^4 + 2B^2\cos 2a + \cos^2 2a,$$

$$c^2 = B^4 + 2B^2\cos 2a + 1,$$

et ce dernier résultat est supérieur au précédent. Il faut donc que λ reste inférieure à la latitude limite λ_0 capable d'annuler l'expression ci-dessus

$$\sin^2\lambda_0\cos 2a + \cos^2\lambda_0 + B^2 - c = 0,$$

$$\operatorname{tang}\lambda_0 = \sqrt{\frac{1 + B^2 - c}{c - B^2 - \cos 2a}}.$$

Cette valeur fournira l'équation de la cônhélice de contact avec le cône limite; laquelle se dédouble ensuite en deux autres pour des latitudes moindres.

51. Si l'on remplaçait z par mz dans l'équation (26) du cercle générateur et dans la suite du calcul, on obtiendrait de même l'équation de la surface nautiloïde *à front normal elliptique;* type dont se rapprochent dans la nature fossile certaines ammonites.

SECONDE PARTIE

Volume, centre de gravité, moment d'inertie

§ VIII

Formules fondamentales

52. Nous entreprenons, dans cette seconde partie, d'établir pour les surfaces à front générateur, les diverses théories qui constituent la Géométrie des masses. Nous supposerons essentiellement en ce moment le front normal. Il nous sera aisé plus tard (§ XIV) d'étendre ces méthodes à un front quelconque.

J'appelle u l'élément, infinitésimal dans toutes ses dimensions, de l'aire U de la génératrice. Ses coordonnées, envisagées dans le plan de front, sont ξ et z. Je désigne par m_k le *moment d'ordre* k de l'aire entière

$$m_k = \Sigma u \xi^k,$$

pris par rapport à l'axe vertical mené par le point décrivant de la directrice. On aura par exemple m_0 pour l'aire elle-même U; m_1 représentera le moment ordinaire de cette étendue, et par suite $\frac{m_1}{m_0}$ l'abscisse de son centre de gravité; m_2 sera son moment d'inertie.

Envisageons le front dans deux situations infiniment rapprochées. Elles renferment entre elles une tranche élémentaire, représentant la différentielle dV du volume fini V compris entre deux fronts extrêmes. L'élément v de cette tranche sera un tronc de cylindre, élevé normalement sur l'aire infinitésimale u. Nous désignerons par n_k le moment d'ordre k du volume de la tranche dV

$$n_k = \Sigma v \xi^k.$$

Comme tout à l'heure, n_0 sera le volume lui-même dV de cette tranche, $\frac{n_1}{n_0}$ l'abscisse de son centre de gravité, n_2 son moment d'inertie.

Il est de la plus grand importance de ne jamais confondre

les n avec les m. Les premières forment précisément l'objet de nos recherches dans cette seconde partie. Quant aux intégrales définies m, elles doivent être ici considérées comme directement connues par l'application du calcul intégral à la génératrice f, lorsque cette fonction est exprimée dans chaque cas.

53. L'élément infinitésimal du troisième ordre v a la forme d'un cylindre élevé sur la base u normalement au front F, et coupé obliquement par le suivant F'. L'angle de ces deux plans étant lui même infiniment petit, nous pouvons supprimer, au moyen d'une troncature opérée par un plan parallèle à F, un élément du quatrième ordre. Le volume de v sera alors le produit de n par la hauteur nn' (fig. 9).

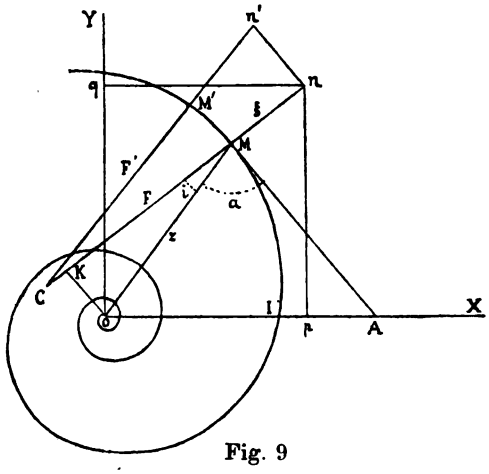

Fig. 9

Celle-ci peut s'évaluer en fonction de l'arc de la directrice $ds = \mathrm{MM}'$, au moyen des triangles semblables CMM', Cnn' formés par deux rayons de courbure consécutifs de cette ligne. Je désigne leur longueur par ρ. Les triangles donnent alors la proportion

$$\frac{nn'}{ds} = \frac{\xi + \rho}{\rho}, \qquad nn' = \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) ds.$$

Il vient donc

$$v = u\left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) ds.$$

$$n_k = \Sigma u \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) \xi^k ds = ds \Sigma u \xi^k + \frac{ds}{\rho} \Sigma u \xi^{k+1}.$$

De là cette formule fondamentale

$$n_k = \left(m_k + \frac{m_{k+1}}{\rho}\right) ds, \tag{30}$$

qui relie les n aux m, pour passer des aires de la génératrice aux volumes de la surface à front générateur.

54. Nous apporterons ici une simplification essentielle en nous fondant sur la condition qui domine toutes nos théories, à savoir la similitude incessante des sections génératrices.

Marquons sur la directrice un point arbitrairement choisi, mais dorénavant immuable. Je le désignerai toujours par la lettre I, et ses coordonnées par r_1, θ_1. A moins d'avertissement contraire, nous adopterons ordinairement pour ce point l'intersection de la courbe par l'axe polaire ($\theta_1 = 0$); et nous prendrons comme unité de longueur ($r_1 = 1$) le segment ainsi intercepté sur cet axe.

Les dimensions linéaires de la section variable U de la génératrice, sont à celles de son passage U_1 par la trace I de la directrice sur l'axe polaire, dans le rapport de $\varphi(\theta)$ à $\varphi(\theta_1)$, ou en abrégé $\frac{\varphi}{\varphi_1}$. Les éléments superficiels seront dans le rapport des carrés. On aura donc

$$\xi = \frac{\varphi}{\varphi_1}\xi_1, \qquad u = \frac{\varphi^2}{\varphi_1^2}u_1,$$

$$\Sigma u \xi^k = \frac{\varphi^{k+2}}{\varphi_1^{k+2}}\Sigma u_1 \xi_1^k,$$

c'est-à-dire

$$m_k = \frac{\varphi^{k+2}}{\varphi_1^{k+2}}(m_k)_1. \tag{31}$$

Désignons par μ_k le facteur *constant*

$$\mu_k = \frac{(m_k)_1}{\varphi_1^{k+2}},$$

qui dépend de k, mais nullement de θ. Nous pourrons alors écrire simplement

$$m_k = \varphi^{k+2}\mu_k,$$

et la formule fondamentale (30) deviendra

$$n_k = \left(\mu_k + \frac{\varphi}{\rho}\mu_{k+1}\right)\varphi^{k+2}ds. \tag{32}$$

55. Ceci posé dans des termes complètement généraux, introduisons des hypothèses progressivement restrictives.

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons envisagé des surfaces vectorielles *du premier ordre,* en supposant que $\varphi(\theta)$ ne soit autre que le rayon vecteur lui-même $F(\theta)$ de la directrice. Nous appellerons plus généralement *surfaces vectorielles d'ordre p* celles pour lesquelles les dimensions de la génératrice varient comme la puissance p de ce rayon vecteur. Nous prendrons à cet effet, sans nous embarrasser de coefficients constants

$$\varphi(\theta) = r^p = F^p(\theta)\,. \tag{33}$$

Cet ordre p sera ordinairement entier et positif; mais il peut tout aussi bien devenir fractionnaire, incommensurable, ou même négatif.

Pour $p = 1$, nous retrouverons les surfaces à proprement parler vectorielles. En faisant $p = 0$, on aura en particulier les *surfaces-tubes,* pour lesquelles la section normale à la directrice reste constante.

Avec une vectorielle d'ordre quelconque p, la formule fondamentale (32) deviendra;

$$n_k = \left(\mu_k + \frac{F^p}{\rho}\mu_{k+1}\right) F^{(k+2)p}\, ds\,. \tag{34}$$

56. Abandonnous le caractère vectoriel, en rendant à φ toute son indépendance; mais particularisons la directrice, en adoptant la spirale logarithmique

$$F = e^{A\theta}\,, \qquad F' = Ae^{A\theta}\,, \tag{35}$$

$$ds = d\theta\sqrt{F^2 + F'^2} = \frac{e^{A\theta}}{\sin a}\, d\theta\,,$$

$$\rho = \frac{(F^2 + F'^2)^{\frac{3}{2}}}{F^2 + 2F'^2 - FF''} = \frac{e^{A\theta}}{\sin a}\,.$$

L'équation fondamentale (32) devient alors

$$n_k = \left(\mu_k + \frac{\varphi \sin a}{e^{A\theta}}\mu_{k+1}\right)\varphi^{k+2}\frac{e^{A\theta}}{\sin a}\, d\theta \tag{36}$$

$$= \left(\frac{e^{A\theta}}{\sin a}\mu_k + \varphi\mu_{k+1}\right)\varphi^{k+2}\, d\theta\,.$$

57. Réunissons maintenant les deux caractères qui viennent de nous occuper: directrice spirale et similitude vectorielle d'ordre p. Il viendra, en rendant à φ, dans la formule (36), sa valeur (33)

$$n_k = \left(\mu_k + \frac{e^{p\mathrm{A}\theta}}{e^{\mathrm{A}\theta}} \sin a \,.\, \mu_{k+1}\right) e^{(k+2)p\theta} \,.\, \frac{e^{\mathrm{A}\theta}}{\sin a}\, d\theta$$

$$= \left(\frac{\mu_k}{\sin a} + e^{(p-1)\mathrm{A}\theta}\mu_{k+1}\right) e^{[(k+2)p+1]\mathrm{A}\theta}\, d\theta \,.$$

On peut aussi mettre ce résultat sous une autre forme, en introduisant la différentielle dr au lieu de $d\theta$

$$dr = \frac{\cos a}{\sin a}\, e^{\mathrm{A}\theta}\, d\theta \,.$$

Il vient ainsi

$$n_k = (\mu_k + r^{p-1} \sin a \,.\, \mu_{k+1}) \frac{r^{(k+2)p}}{\cos a}\, dr \,.$$

Pour une vectorielle ordinaire ($p = 1$), ces deux formules deviennent

$$n_k = \left(\frac{\mu_k}{\sin a} + \mu_{k+1}\right) e^{(k+3)\mathrm{A}\theta}\, d\theta \,,$$

(37) $$n_k = (\mu_k + \mu_{k+1} \sin a) \frac{r^{k+2}}{\cos a}\, dr \,.$$

§ IX

Volume

58. La recherche du volume V se fera en supposant $k = 0$ dans les formules générales du § VIII.

Prenons, ainsi qu'il a été dit (N° 54), le point fixe I sur l'axe polaire en supposant $\theta_1 = 0$, avec des coefficients d'homogénéité tels que $\varphi(\theta_1) = 1$. Dans ces conditions, μ_0, ou $\frac{(m_0)_1}{\varphi_1^2}$, se réduit à l'aire U_1 que présente la section génératrice lors de son passage en I.

Quant à μ_1, c'est alors le moment $U_1 \xi'_1$ de cette aire par rapport à la verticale de I, en appelant, pour cette situation spéciale, ξ'_1 l'abscisse (prise par rapport à I dans le front normal F_1) du centre de gravité de l'aire U_1.

De son coté n_0 est le volume dV de la tranche, et la formule générale (32) devient dans ces conditions

$$(38) \qquad dV = \left(1 + \frac{\varphi}{\rho}\xi'_1\right) U_1 \varphi^2 ds,$$

c'est-à-dire finalement

$$(39) \qquad \frac{dV}{d\theta} = \frac{U_1\varphi^2}{F^2 + F'^2}\left[(F^2 + F'^2)^{\frac{3}{2}} + \xi'_1\varphi(F^2 + 2F'^2 - FF'')\right].$$

Le problème se trouve ainsi ramené aux quadratures.

Envisageons quelques applications.

59. *Surfaces de révolution.* — Nous obtiendrons une vérification en prenant comme directrice un cercle concentrique à l'origine

$$F = 1, \qquad F' = F'' = 0,$$

avec une génératrice constante

$$\varphi = 1.$$

La formule (38) devient:

$$dV = (1 + \xi'_1) U_1 d\theta, \qquad V = (1 + \xi'_1) U_1 \theta.$$

Or ξ'_1 désigne la distance du centre de gravité de l'aire génératrice U_1 à la trace I, et par suite $1 + \xi'_1$ sa distance à l'axe de rotation. Le produit $(1 + \xi'_1)\theta$ est donc l'arc de cercle décrit par ce centre de gravité pendant que l'aire U_1 engendre un onglet de ce corps de révolution. Nous retrouvons ainsi le théorème de Guldin.

60. *Surfaces-tubes.* — Conservons la génératrice constante $\varphi = 1$, mais avec une directrice quelconque. La formule (38) s'écrira

$$dV = (ds + \xi'_1 d\varepsilon) U_1,$$

si nous appelons ε l'angle de contingence de cette courbe. On

aura d'après cela

$$V = U_1 s + U_1' \xi_1 \varepsilon .$$

Le volume de la surface-tube s'exprime donc par la somme de deux autres, à savoir: 1° le produit de l'aire constante par l'arc que décrit sur la directrice celui de ses points qui guide le mouvement normalement à cette courbe; 2° le produit de cette même aire par l'arc de cercle que décrirait son centre de gravité en tournant de l'angle total de contingence autour de l'axe mené par le point décrivant perpendiculairement au plan de la directrice (1).

61. *Surfaces de gyration.* — Je désigne ainsi les surfaces engendrées par la rotation d'un profil méridien dont un point décrit un cercle, mais qui, au lieu de rester invariable, comme pour les corps de révolution, se modifie homothétiquement par rapport à ce point d'après la loi $\varphi(\theta)$.

Prenons pour unité le rayon ρ du cercle qui sert de directrice. Son arc ds sera mesuré par $d\theta$, et la formule (38) deviendra

$$dV = (1 + \xi'_1 \varphi) U_1 \varphi^2 d\theta ,$$

d'où en intégrant

$$V = U_1 \int \varphi^2(\theta) d\theta + U_1 \xi'_1 \int \varphi^3(\theta) d\theta .$$

Je ne m'arrêterai pas à des applications particulières.

62. *Spirales sinusoïdes.* — Envisageons comme directrice la spirale sinusoïde

$$r^n = C^n \cos n\theta ,$$

d'ordre quelconque n

$$F = C \cos^{\frac{1}{n}} n\theta , \qquad F' = - C \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta \sin n\theta ,$$

$$\sqrt{F^2 + F'^2} = C \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta .$$

Nous laissons la génératrice quelconque. Toutefois, pour simplifier les résultats, nous la supposerons *centrée,* c'est-à-dire décrivant la directrice, soit par son centre de gravité lui même, soit par la projection équatoriale de ce point. En un mot: $\xi'_1 = 0$.

(1) Voy. le mémoire de M. Kœnigs sur les surfaces-tuyaux.

Nous admettrons en outre la similitude vectorielle d'ordre quelconque p. La relation (38) donne alors :

$$dV = U_1 \left(\frac{r}{C}\right)^{2p} ds,$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{U_1}{C^{2p}} \sqrt{F^2 + F'^2} = U_1 C \cos^{\frac{2p-n+1}{n}} n\theta,$$

$$V = U_1 C \int_0^\theta \cos^{\frac{2p-n+1}{n}} n\theta . d\theta,$$

en intégrant depuis l'axe polaire ($\theta = 0$, $r = C$) jusqu'à un azimut quelconque.

On peut en particulier, lorsque n est positif, intégrer jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2n}$; ce qui correspond à $r = 0$, en embrassant une demi-boucle de la directrice.

63. Quel que soit l'ordre n, nous pouvons réussir l'intégration en employant une loi vectorielle toujours la même, à savoir la variation des dimensions de la génératrice en raison inverse de la moyenne géométrique entre le rayon vecteur et la longueur qui sert d'unité.

Cet énoncé donne en effet :

$$p = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{2p-n+1}{n} = -1,$$

$$V = U_1 C \int^\theta \frac{d\theta}{\cos n\theta} = \frac{U_1 C}{n} \operatorname{Log} \operatorname{tang} \left(\frac{n\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

On peut notamment appliquer ce résultat aux directrices très simples :

$n = -2$, Hyperbole équilatère, rapportée à son centre,

-1, Ligne droite quelconque,

$-\frac{1}{2}$, Parabole, rapportée à son foyer,

$+\frac{1}{2}$, Cardioïde, rapportée à son rebroussement,

$+1$, Cercle, rapporté à un de ses points,

$+2$, Lemniscate de Bernoulli, rapportée à son centre.

64. Posons maintenant

$$(40) \qquad \frac{2p-n+1}{n}=\mathrm{N}, \qquad (\mathrm{N}+1)n-2p=1,$$

$$\mathrm{V}=\mathrm{U_1C}\int_0^{\theta}\cos^{\mathrm{N}} n\theta d\theta=\frac{\mathrm{U_1C}}{n}\int_0^{n\theta}\cos^{\mathrm{N}}\alpha d\alpha.$$

Attribuons par la pensée à N diverses valeurs déterminées arbitrairement; puis, pour chacune d'elles, faisons varier corrélativement n et p de manière à satisfaire par leurs couples de valeurs simultanées à la condition (40). Si nous conservons à l'azimut θ une même valeur pour former la limite de l'intégration, l'on voit que la différentielle, et par suite l'intégrale définie, resteront identiques pour ces diverses hypothèses. De là une infinité de familles (de paramètre N) composées chacune d'une infinité de surfaces (de paramètres conjoints n, p) lesquelles, bien que profondément différentes les unes des autres par la forme, présentent cette propriété remarquable d'avoir toutes, pour le même azimut limite θ, un même volume, dont la valeur ne varie que d'une famille à l'autre avec N.

On pourrait même, toutes les fois que N recevra une valeur commensurable, employer l'analyse indéterminée du premier degré à chercher pour n et p des systèmes de valeurs entières qui satisfassent à l'équation (40), de manière à obtenir des spirales sinusoïdes et des lois vectorielles simples.

Les systèmes de valeurs de n et p qui satisfont à la condition (40) pour une famille déterminée N, se groupent deux par deux pour des valeurs de n égales et de signes contraires. Elles correspondent à des spirales sinusoïdes transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques, et respectivement associées aux lois vectorielles

$$p=\frac{(\mathrm{N}+1)n-1}{2}, \qquad p'=-\frac{(\mathrm{N}+1)n+1}{2},$$

qui satisfont à la relation

$$p+p'=-1.$$

Il s'attachera de même un intérêt spécial aux familles d'ordre N entier et de signe quelconque; car l'intégration peut alors toujours s'effectuer entièrement par les méthodes classiques. J'indiquerai à cet égard les cas les plus simples.

65. Supposons en premier lieu

$$N = 0\,; \qquad p = \frac{n-1}{2}, \qquad n = 2p + 1\,;$$

et considérons comme exemple dans cette famille le cercle passant par le pôle ($n = 1$). Il s'ensuit: $p = 0$, c'est-à-dire la loi vectorielle des surfaces-tubes. On obtient ainsi un anneau engendré par la révolution d'une aire quelconque, dont le centre de gravité parcourt un cercle. La formule (40) donne alors

$$V = U_1 C\theta\,.$$

Dans cette expression C désigne le diamètre du cercle, et θ l'angle inscrit. $C\theta$ est donc le produit du rayon par l'angle au centre, c'est-a-dire l'arc du cercle directeur. D'ailleurs U_1 représente l'aire génératrice. On retrouve donc le théorème de Guldin.

66. Soit en second lieu

$$N = 1\,; \qquad p = n - \frac{1}{2}, \qquad n = p + \frac{1}{2}\,;$$

$$V = U_1 C \int_0^\theta \cos n\theta d\theta = \frac{U_1 C}{n} \sin n\theta\,.$$

Comme premier exemple dans cette seconde famille, considérons la parabole rapportée à son foyer

$$n = -\frac{1}{2}, \qquad p = -1\,; \qquad V = 2U_1 C \sin\frac{\theta}{2}\,.$$

La similitude de la section génératrice doit alors se régler en raison inverse du rayon focal. Si l'on étend l'intégration jusqu'à $\theta = \pi$, il vient pour le volume du demi-solide indéfini

$$V' = 2_1 UC\,,$$

et pour le corps entier

$$V'' = 4U_1 C\,.$$

Prenons comme second exemple de cette même famille la

cardioïde

$$n = \frac{1}{2}, \qquad p = 0,$$

surface-tube dont la directrice est conjuguée de la précédente par rayons vecteurs réciproques, et donne les mêmes formules.

67. Envisageons encore la famille de surfaces

$$N = 2; \qquad p = \frac{3n-1}{2}, \qquad n = \frac{2p+1}{2};$$

$$V \equiv U_1 C \int_0^\theta \cos^2 n\theta d\theta = \frac{U_1 C}{2} \int^\theta (1 + \cos 2n\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{U_1 C}{4n} (2n\theta - \sin 2n\theta).$$

Comme premier exemple, prenons le cercle passant par le pôle

$$n = 1, \qquad p = 1; \qquad V = \frac{U_1 C}{4} (2\theta - \sin 2\theta).$$

La surface est purement vectorielle, et nous retrouvons l'anneau variable à section normale (N° 48). Le volume du corps entier (pour $\theta = \pi$) est le suivant

$$V' = \frac{\pi U_1 C}{2},$$

c'est-à-dire le produit de l'aire génératrice par la moitié de la circonférence directrice.

La surface conjuguée sera, en changeant le signe de n

$$n = -1, \qquad p = -2.$$

Sa directrice est une ligne droite. Les dimensions de la génératrice varient en raison inverse du carré du rayon vecteur, et par conséquent son aire en raison inverse de la quatrième puissance. Le solide, quoique infini en longueur, comme celui que nous avons dérivé de la parabole, reste, ainsi que ce dernier, de volume fini, représenté par la formule précédente.

68. Je prendrai une dernière application parmi les valeurs négatives de N. L'hypothèse $N = -1$ serait précisément celle qui a permis de réussir l'intégration (N° 63), pour une valeur tout-à-fait quelconque de n, avec la loi spéciale $p = -\frac{1}{2}$. Il n'y a pas à y revenir.

Passons donc à la valeur

$$N = -2\,; \qquad p = -\frac{n+1}{2}, \qquad n = -(2p+1)\,;$$

$$V = U_1 C \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2 n\theta} = \frac{U_1 C}{n} \operatorname{tang} n\theta\,.$$

Comme premier exemple dans cette dernière famille, envisageons le cercle

$$n = 1\,, \qquad p = -1\,; \qquad V = U_1 C \operatorname{tang} \theta\,.$$

Les dimensions de la génératrice varient en raison inverse du rayon vecteur; et l'on obtient une sorte de conque évasée en forme de cor. Son volume total serait infini; mais on peut le déduire de la formule précédente pour un azimut poussé aussi près que l'on voudra de π.

La figure conjuguée

$$n = -1\,, \qquad p = 0\,,$$

correspond à une directrice rectiligne, avec section constante. C'est donc un cylindre quelconque à bases parallèles; et son volume connu nous fournit une vérification de la formule précédente.

69. *Surfaces nautiloïdes.* — Arrivons enfin à l'objet principal de ces études: les surfaces nautiloïdes, à front normal, directrice spirale et similitude vectorielle ordinaire ($p = 1$). La génératrice reste quelconque; et c'est à titre particulier que l'on pourra invoquer, pour le nautile à front circulaire normal (N° 49), le résultat général que nous allons formuler.

La relation (37) donne alors, pour $k = 0$

$$dV = n_0 = (\mu_0 + \mu_1 \sin a)\,\frac{r^2 dr}{\cos a}\,.$$

d'où [1], en intégrant à partir du pôle ($r = 0$).

$$V = \frac{U_1}{3 \cos a} (1 + \xi'_1 \sin a) r^3 .$$

Il ne faut pas perdre de vue que cette formule totalise le volume de toutes les spires consécutives, qui parfois se pénètrent mutuellement dans une même portion de l'espace. Mais il est facile de s'affranchir de cette complication. Il suffit à cet égard de se limiter à l'évaluation d'un tronçon d'amplitude inférieure à 2π. Il sera la différence de deux expressions semblables à la précédente; et dans cette soustraction la partie compliquée aura identiquement disparu.

Supposons en particulier une génératrice centrée sur la verticale du point décrivant ($\xi'_1 = 0$). Il vient alors plus simplement, pour le volume compté à partir du pôle

$$V = \frac{U_1}{3 \cos a} r^3 ,$$

et pour un tronçon limité M'M''

$$V'' - V' = \frac{U_1}{3 \cos a} (r''^3 - r'^3) = \frac{r'' - r'}{\cos a} \cdot \frac{U_1 (r'^2 + r''^2 + r'r'')}{3} .$$

Or $\frac{r}{\cos a}$ représente l'arc s de la spirale logarithmique compté à partir du pôle, et $U_1 r^2$ mesure la section U au point quelconque M de rayon r. On peut donc écrire

$$V'' - V' = (s'' - s') \frac{U' + U'' + \sqrt{U'U''}}{3} .$$

D'après cela, *le volume d'un tronc limité de nautiloïde à front normal quelconque, mais centré, est le produit de l'arc de spirale que décrit le centre de gravité de l'aire, par la moyenne arithmétique de la grande base, de la petite base, et d'une moyenne géométrique entre ces deux bases.*

---

[1] Dans cette formule, et toutes les suivantes relatives aux surfaces nautiloïdes, a disparu l'homogénéité, que nous avions au contraire mise en évidence pour les spirales sinusoïdes; attendu que l'équation (35) de la spirale logarithmique suppose que l'on a pris pour unité la longueur OI interceptée sur l'axe polaire.

§ X

Centres de gravité

70. La recherche du centre de gravité (c'est-à-dire celle du moment du premier ordre) se fera en supposant dans les formules générales du § VIII, $k = 1$. Les coordonnées de ce centre sont en effet le quotient par V (dont nous possédons maintenant l'expression) des moments Σvx, Σvy, Σvz. Nous reprenons d'ailleurs une entière généralité pour les trois fonctions F, f, φ.

Nous poserons d'abord des formules fondamentales (fig. 9)

$$x = Op = \mathrm{OM}\cos \mathrm{MOA} + \mathrm{M}n \cos(\mathrm{MOA} - \mathrm{KMO})$$
$$= r\cos\theta + \xi\cos\left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right],$$

c'est-à-dire

$$x = r\cos\theta + \xi\sin(\theta + a), \tag{41}$$

et de même

$$y = r\sin\theta - \xi\cos(\theta + a). \tag{42}$$

Prenons d'après cela le moment relatif au plan YOZ, qui nous fournira l'abscisse du centre de gravité [1],

$$d\Sigma vx = r\cos\theta\,\Sigma v + \sin(\theta + a)\,\Sigma v\xi = n_0 r\cos\theta + n_1\sin(\theta + a)$$
$$= \left(m_0 + \frac{m_1}{\rho}\right) r\cos\theta ds + \left(m_1 + \frac{m_2}{\rho}\right)(\sin\theta . ds\cos a + \cos\theta . ds\sin a)$$
$$= \left(\mu_0 + \frac{\varphi}{\rho}\mu_1\right)\varphi^2 r\cos\theta ds + \left(\mu_1 + \frac{\varphi}{\rho}\mu_2\right)\varphi^3(dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta).$$

---

[1] Je crois devoir signaler à l'attention que, dans cette formule, et pour un grand nombre des suivantes, le signe de sommation Σ s'étend dans le premier membre à tout l'ensemble du corps considéré et, dans le second, seulement à la tranche infinitésimale. C'est au fond le $d\Sigma$ du premier membre qui équivaut aux Σ du second; les deux membres des équations se rapportant, bien entendu, au même système matériel. .

Nous aurons donc, en divisant par θ

$$(43)\qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vx = \mu_0\varphi^2 r\cos\theta\frac{ds}{d\theta}$$
$$+\mu_1\varphi^3\left(\frac{r}{\rho}\cos\theta\frac{ds}{d\theta}+r\cos\theta+\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\right)$$
$$+\mu_2\varphi^4\left(r\cos\theta+\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\right).$$

On trouverait par une marche semblable (42)

$$(44)\qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vy = \mu_0\varphi^2 r\sin\theta\frac{ds}{d\theta}$$
$$+\mu_1\varphi^3\left(\frac{r}{\rho}\sin\theta\frac{ds}{d\theta}+r\sin\theta-\frac{dr}{d\theta}\cos\theta)\right)$$
$$+\mu_2\varphi^4\left(r\sin\theta-\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\right).$$

71. Envisageons en troisième lieu l'altitude z. Il vient à cet égard (N° **54**)

$$d\Sigma vz = \Sigma uz\left(1+\frac{\xi}{\rho}\right)ds = ds\Sigma uz+\frac{ds}{\rho}\Sigma uz\xi.$$

Nous avons représenté ci-dessus par m_1, m_2, ..., les intégrales $\Sigma u\xi$, $\Sigma u\xi^2$, ..., fonctions de la seule abscisse ξ de l'élément u. Désignons de même par l_1, l_2, ..,, les intégrales Σuz, Σuz^2, ..., fonctions de l'altitude z uniquement; et encore par l'_2 l'intégrale $\Sigma uz\xi$ qui dépend à la fois des deux coordonnées. Ces symboles représentent, au même titre que les précédents m, des quantités qui doivent être considérées comme connues d'après l'équation de la génératrice (§ XIV).

De plus nous poserons, comme au N° **55**, en nous rapportant au même point arbitraire I

$$l_k = \frac{\varphi^{k+2}}{\varphi_1{}^{k+2}}(l_k)_1 = \lambda_k\varphi^{k+2}, \qquad \lambda_k = \frac{(l_k)_1}{\varphi_1{}^{k+2}}.$$

Il viendra dans ces conditions

$$(45)\qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vz = \left(\lambda_1+\frac{\varphi}{\rho}\lambda'_2\right)\varphi^3\frac{ds}{d\theta}.$$

En substituant dans les formules générales (43), (44), (45), les expressions classiques de $\frac{ds}{d\theta}$ et ρ, nous posséderons donc en fonction de θ, φ, F, F′, F″ les dérivées par rapport à θ des moments relatifs aux trois plans coordonnés, et le problème se trouve ainsi ramené aux quadratures.

72. Attachons nous spécialement au cas des surfaces nautiloïdes, pour lesquelles nous avons

$$p = 1, \qquad \varphi = \mathrm{F},$$

$$r = e^{\mathrm{A}\theta}, \qquad \frac{dr}{d\theta} = \mathrm{A}e^{\mathrm{A}\theta}, \qquad \frac{ds}{d\theta} = \frac{r}{\sin a}, \qquad \rho = \frac{r}{\sin a}.$$

Il vient alors (43), avec une valeur constante pour a

$$\frac{d\Sigma vx}{d\theta} = \mu_0 r^4 \frac{\cos\theta}{\sin a} + \mu_1 r^4 \left(2\cos\theta + \frac{\cos a}{\sin a}\sin\theta\right)$$
$$+ \mu_2 r^4 \sin a \left(\cos\theta + \frac{\cos a}{\sin a}\sin\theta\right),$$

et par suite:

$$\Sigma vx = \left(\frac{\mu_1}{\sin a} + \mu_2\right)\cos a \int_{-\infty}^{\theta} e^{4\mathrm{A}\theta}\sin\theta\, d\theta$$
$$+ \left(\frac{\mu_0}{\sin a} + 2\mu_1 + \mu_2 \sin a\right)\int_{-\infty}^{\theta} e^{4\mathrm{A}\theta}\cos\theta\, d\theta.$$

Rien ne serait plus facile que de transcrire le résultat de ces intégrations, qui sont classiques; mais nous pouvons en simplifier l'expression de la manière suivante.

Le centre de gravité du volume, étendu depuis le pôle jusqu'au front normal mené par le point décrivant M. d'azimut θ, fait, d'après la similitude fondamentale, partie de l'édifice géométrique dont ce point est le directeur. Il suffit donc de déterminer la position de ce centre dans l'édifice pour un seul instant; par exemple pour le point de repère I, qui a été choisi sur l'axe polaire. Le centre G occupera ensuite, par rapport au terminus quelconque OM, une position homothétique de celle que présente ce dernier G_1 relativement à OI.

En un mot, il nous suffit d'intégrer, non plus de $-\infty$ à θ, mais de $-\infty$ à zéro. Ces quadratures, qui ont naturellement

des expressions plus simples que les précédentes sont

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4A\theta} \sin\theta \, d\theta = -\frac{\sin^2 a}{1 + 15\cos^2 a},$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4A\theta} \cos\theta \, d\theta = \frac{4 \sin a \cos a}{1 + 15\cos^2 a}.$$

et nous donnent

$$(1 + 15\cos^2 a)(\Sigma vx)_1 = -\sin^2 a \cos a \left(\frac{\mu_1}{\sin a} + \mu_2\right)$$

$$+ 4 \sin a \cos a \left(\frac{\mu_0}{\sin a} + 2\mu_1 + \mu_2 \sin a\right),$$

c'est-à-dire finalement

$$(1 + 15\cos^2 a)(\Sigma vx)_1 = 4\mu_0$$
$$+ \mu_1 \sin a (8 - \cos a) + \mu_2 \sin a (4 \sin a - 1).$$

On trouvera de même (44)

$$(1 + 15\cos^2 a)(\Sigma vy)_1 = -\mu_0 \sin a$$
$$-2\mu_1 (1 + \cos^2 a) - \mu_2 \sin a (1 + 3\cos^2 a).$$

En ce qui concerne le troisième moment, il nous vient (45)

$$\frac{d}{d\theta} \Sigma vz = (\lambda_1 + \lambda'_2 \sin a) \frac{r^4}{\cos a}.$$

$$\Sigma vz = \frac{\lambda_1 + \lambda'_2 \sin a}{\cos a} \int_{-\infty}^{\theta} e^{4A\theta} \, d\theta = \frac{\sin a}{4\cos^2 a} (\lambda_1 + \lambda'_2 \sin a) e^{4A\theta},$$

et en particulier pour le point I

$$(\Sigma vz)_1 = \frac{\sin a}{4\cos^2 a} (\lambda_1 + \lambda'_2 \sin a).$$

§ XI

Lieux géométriques de centres de gravité

73. Proposons nous la recherche du lieu géométrique du centre de gravité, lorsque vient à se mouvoir le point décri-

vant, terminus d'un tronçon variable. Nous distinguerons à cet égard trois problèmes différents.

Nous pouvons en effet envisager: 1° le lieu du centre de gravité γ de l'aire génératrice sans épaisseur U comprise dans le plan de front; 2° celui du centre de gravité g du tronc de cylindre infiniment mince dV compris entre ce front et le suivant; 3° ou enfin celui du centre de gravité G du tronçon fini V renfermé entre une section fixe et un front variable. Abordons successivement ces trois questions.

74. J'appellerai r', θ', z' les coordonnées du centre de gravité γ de l'aire sans épaisseur de la section génératrice. Il se trouve déterminé, dans le plan de front lui même, par cette altitude z' et son abscisse ξ' relative au point directeur M

$$\xi' = \frac{m_1}{m_0} = \frac{\mu_1 \varphi^3}{\mu_0 \varphi^2} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \varphi. \tag{46}$$

Marquons par γ_0 sur la figure 10 la projection équatoriale du centre de gravité γ de l'espace.

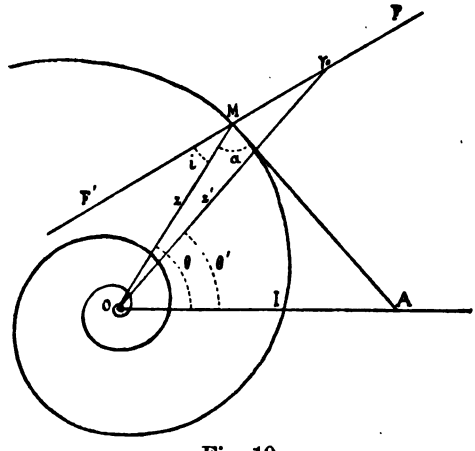

Fig. 10

Le triangle OMγ nous donne en premier lieu

$$\overline{O\gamma_0}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{M\gamma_0}^2 - 2\overline{OM} \cdot \overline{M\gamma_0} \cdot \cos OM\gamma_0.$$

On a d'ailleurs

$$\cos OM\gamma_0 = -\sin a = -\frac{z d\theta}{ds} = -\frac{F}{\sqrt{F^2 + F'^2}}.$$

Il vient donc

$$(47) \qquad r' = \sqrt{r^2 + \xi'^2 + 2r\xi' \frac{F}{\sqrt{F^2 + F'^2}}}.$$

En remplaçant r par F, et ξ' par l'expression (46), nous aurons celle de r' en fonction de θ.

Le même triangle donne en second lieu

$$\frac{\sin MO\gamma_0}{M\gamma_0} = \frac{\sin OM\gamma_0}{O\gamma_0},$$

c'est-à-dire

$$(48) \qquad \sin(\theta - \theta') = \frac{\xi'}{r'} \cos a = \frac{\xi'}{r'} \frac{dr}{ds} = \frac{\xi'}{r'} \frac{F'}{\sqrt{F^2 + F'^2}}.$$

En substituant pour ξ' et r' les valeurs (46) et (47), nous obtiendrons celle de θ' en fonction de θ.

L'élimination du paramètre θ entre les expressions (47) et (48) fournira, avec les coordonnées polaires, r', θ', l'équation du lieu géométrique de la projection équatoriale γ_0 du centre γ.

Quant à l'altitude z' de ce dernier, elle participe à la similitude générale dont le rapport régulateur est φ. On a donc, en se repérant au point I

$$\frac{z'}{z_1} = \frac{\varphi(\theta)}{\varphi(0)}.$$

En adjoignant cette relation aux deux précédentes (47) et (48) pour l'élimination de θ, l'on obtiendra entre r', θ', z' les deux équations du lieu géométrique du centre de gravité γ dans l'espace.

75. Passons au second problème, en envisageant, à la place de γ, le centre de gravité g du volume de la tranche infinitésimale.

Désignons par r'', θ'', z'' ses coordonnées, et par ξ'' son abscisse dans la section frontale par rapport au point directeur M. Si l'on remplace, sur la figure 10, γ_0 par g_0, projection de g, il n'y aura rien à changer pour la marche des calculs, si ce n'est que, dans la relation (46), les intégrales m, relatives à l'aire sans épaisseur, doivent être remplacées par les n, qui se rapportent au

volume de la tranche. Il vient ainsi :

$$(49)\qquad \xi'' = \frac{n_1}{n_0} = \frac{m_1 + \dfrac{m_2}{\rho}}{m_0 + \dfrac{m_1}{\rho}} = \frac{\mu_1 \varphi^3 + \dfrac{\mu_2 \varphi^4}{\rho}}{\mu_0 \varphi^2 + \dfrac{\mu_1 \varphi^3}{\rho}} = \varphi \frac{\mu_1 \rho + \mu_2 \varphi}{\mu_0 \rho + \mu_1 \varphi}.$$

En substituant (49) à (46), on n'aura qu'à conduire des éliminations semblables pour obtenir entre (r'', θ''), ou entre (r'', θ'', z'') les équations respectives du lieu géométrique de g_0 sur l'équateur, ou de g dans l'espace.

76. La modification sera plus profonde pour la troisième question. En effet G ne se trouve plus dans le plan de front, comme g et comme γ. Nous appellerons (r''', θ''', z''') ou (x''', y''', z'''), ses coordonnées.

Une première méthode consistera simplement à éliminer θ entre les expressions qui nous sont connues (43), (44), (45) et (39)

$$x''' = \frac{\Sigma vx}{V}, \quad y''' = \frac{\Sigma vy}{V}, \quad z''' = \frac{\Sigma vz}{V}.$$

En les envisageant toutes les trois à la fois, on obtiendra les deux équations du lieu de G dans l'espace. Si l'on se borne aux deux premières, elles fourniront celle du lieu de sa projection G_0 dans le plan de l'équateur.

Mais nous pouvons d'autre part rattacher cette recherche à des aperçus tout différents.

77. Si l'on décompose un système matériel quelconque en diverses parties, pour condenser en leurs centres de gravité respectifs leurs masses individuelles, on constitue par là un système fort différent, dont le centre de gravité est néanmoins resté le même.

Appliquons ici ce principe, et condensons au centre de gravité g de l'une des tranches élémentaires sa masse dV, en la répartissant sur l'arc infinitésimal ds'' qui en traverse l'épaisseur le long du second des lieux géométriques que nous avons appris à déterminer (N° 75). Si l'on fait cette opération pour toutes les tranches, cette ligne s'' se trouvera transformée en un

système matériel de densité variable $\frac{dV}{ds''}$; lequel aura le même centre de gravité G que le volume du tronçon V correspondant aux mêmes limites.

Or la formule (38) nous donne

$$dV = \left(\mu_0 + \mu_1 \frac{\varphi}{\rho}\right) \varphi^2 ds,$$

en fonction de θ et $d\theta$, et par suite aussi en θ'' et $d\theta''$ d'après les éléments de l'élimination relative à la seconde question. L'arc ds'' nous est connu de même en θ'' et $d\theta''$. La densité le sera donc de son côté en θ'', ou si l'on veut en s''.

Le troisième problème se trouve ainsi ramené à cette autre recherche d'ordre général: trouver le centre de gravité d'une courbe dont la densité variable est exprimée en fonction de son arc. Les coordonnées de G seront ainsi obtenues en fonction de s'', ou de θ'', et l'élimination du paramètre auxiliaire, conduite comme au N° 76, en fera connaître le lieu géométrique.

78. Cette méthode peut être employée pour les surfaces nautiloïdes.

A la vérité la remarque invoquée ci-dessus (N° 72) que les centres de gravité γ, g, G sont liés à l'édifice géométrique, suffit alors à nous montre à priori que leurs lieux géométriques sont des cônhélices; mais nous ne saurions nous en tenir à ce simple aperçu, et nous poursuivrons leur détermination complète. Je me bornerai toutefois à la recherche du lieu G, qui exige la connaissance préalable de celui de g; mais nous ne nous arrêterons pas au lieu géométrique de γ, qui s'obtiendrait d'une manière toute semblable.

Nous avons d'après les formules (35), (49), (47)

$$\xi'' = r \frac{\frac{\mu_1}{\sin a} + \mu_2}{\frac{\mu_0}{\sin a} + \mu_1} = r \frac{\mu_1 + \mu_2 \sin a}{\mu_0 + \mu_1 \sin a}, \qquad r'' = \frac{jr}{\mu_0 + \mu_1 \sin a},$$

si nous employons l'abréviation j pour désigner le radical

$$j = \sqrt{(\mu_0 + \mu_1 \sin a^2) + (\mu_1 + \mu_2 \sin a)^2 + 2(\mu_0 + \mu_1 \sin a)(\mu_1 + \mu_2 \sin a) \sin a}.$$

Il nous vient d'autre part (48)

$$\sin(\theta - \theta'') = \frac{\xi''}{r''}\cos a = \frac{\cos a}{j}(\mu_1 + \mu_2 \sin a),$$

$$\theta'' = \theta - \text{arc}\sin\left[\frac{\cos a}{j}(\mu_1 + \mu_2 \sin a)\right],$$

et par conséquent, en éliminant θ entre ces deux valeurs

$$r'' = e^{A(\theta'' + \delta)},$$

si l'on fait pour abréger

$$\delta = \text{arc}\sin\left[\frac{\cos a}{j}(\mu_1 + \mu_2 \sin a)\right] + \text{tang}\, a \,\text{Log}\left[\frac{j}{\mu_0 + \mu_1 \sin a}\right].$$

Le lieu de la projection g_0 du centre de gravité g des tranches infinitésimales est donc une spirale logarithmique égale à la directrice, mais déviée de l'angle δ.

Quant à l'altitude z'' de g, elle est donnée par la formule suivante, semblable à (49)

$$z'' = \varphi \frac{\lambda_1 \rho + \lambda_2 \varphi}{\mu_0 \rho + \mu_1 \varphi},$$

d'où, en remplaçant φ par r, et ρ par $\frac{r}{\sin a}$

$$z'' = r \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \sin a}{\mu_0 + \mu_1 \sin a},$$

c'est-à-dire

$$z'' = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \sin a}{\mu_0 + \mu_1 \sin a} e^{A\left\{\theta'' + \text{arc}\sin\left[\frac{\cos a}{j}(\mu_1 + \mu_2 \sin a)\right]\right\}}.$$

z'' est donc proportionnel à r'', et par conséquent, dans l'espace, le lieu de g est la cônhélice qui a pour équation

$$z'' = (\lambda_1 + \lambda_2 \sin a)\, r''.$$

79. Cette ligne conservant une inclinaison constante sur l'horizon, si, après y avoir réparti la masse des tranches qu'elle

traverse, on rabat verticalement toutes ces masses sur la projection équatoriale, on constituera une spirale logarithmique matérielle possédant, en fonction de son propre arc, une loi de densité identique à celle de la cônhélice. Le centre de gravité G de cette dernière se trouvera donc sur la verticale de celui de cette spirale logarithmique.

Si d'un autre coté, en reprenant sur la cônhélice les masses qu'on y avait réparties, on les transporte horizontalement sur cette verticale, cette opération ne changera pas le centre de gravité cherché. Il n'est donc autre finalement que celui de cette droite hétérogène. Mais les arcs de cônhélice sont, d'après la constance de son inclinaison, proportionnels à ces éléments de verticale. La densité de cette dernière suivra donc encore, en fonction de l'altitude, la même loi qne celle de la spirale en fonction de son arc.

Or l'élément infinitésimal du troisième ordre v est proportionnel à uds, par suite à r^2dr, à r''^2dr'', ou encore à $s''_0{}^2ds''_0$ sur la spirale, et à z''^2dz'' pour la verticale. La densité varie donc sur ces deux lignes en raison de $s''_0{}^2$ et de z''^2.

En ce qui concerne la verticale, l'altitude z''' du centre de gravité G s'obtiendra d'après cela immédiatement

$$z''' = \frac{\int_0^{z''} h^2dh \,.\, h}{\int_0^{z''} h^2dh} = \frac{3}{4}\, z''.$$

Quant à la spirale logarithmique, j'ai traité dans une autre occasion (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome CXLII, page 1174) de la recherche du lieu géométrique des centres de gravité de cette courbe lorsque sa densité varie en raison d'une puissance quelconque de son arc, entière, fractionnaire ou incommensurable, positive on négative. J'ai montré alors [1] que ce lieu est une spirale logarithmique dont j'ai déterminé les éléments. Je me bornerai ici à les transcrire pour le seul cas qui nous occupe, dans lequel l'exposant est égal à 2.

Si l'on emploie la notation auxiliaire

$$\cot\beta = 4\cot a\,,$$

[1] Sous certaines réserves relatives à l'exposant négatif, qu'il est inutile de rappeler, puisque ce cas ne se présente pas ici.

on a pour les coordonnées horizontales de G_0

$$x''' = 3r'' \sin\beta \cos(\theta'' - \beta),$$

$$y''' = 3r'' \sin\beta \sin(\theta'' - \beta),$$

et pour le lieu de ce point

$$r''' = e^{A(\theta''' + \Delta)},$$

c'est-à-dire une spirale logarithmique égale au lieu géométrique de g_0 et déviée de

$$\Delta = \operatorname{arc\,cot}(4 \cot a) + \operatorname{tang} a \operatorname{Log}\left(\frac{3 \cos a}{\sqrt{\sin^2 a + 16 \cos^2 a}}\right),$$

ce qui revient finalement à faire tourner la directrice de l'angle $\delta + \Delta$.

Si l'on résolvait numériquement par rapport à l'angle a l'équation transcendante

$$\delta + \Delta = 2k\pi,$$

on déterminerait ainsi des surfaces nautiloïdes spéciales, dont la directrice (quelle que soit la génératrice) contient en elle-même tous les centres de gravité du volume croissant à partir du pôle.

§ XII

Moments d'inertie

80. La recherche des moments d'inertie se fera en supposant, dans les formules générales du § VIII: $k = 2$.

Si l'on demande le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque, la théorie générale permet de passer de cette droite à une autre menée parallèlement par le centre de gravité (lequel nous est connu, § X), puis, au moyen d'une opération inverse, de celle-ci à une troisième tirée parallèlement par l'origine des coordonnées. Nous pouvons donc nous borner à envisager les axes issus de ce point.

En second lieu, la théorie générale rattache le moment d'inertie relatif à une semblable droite, au moyen de l'ellipsoïde de Poinsot, à l'évaluation des six intégrales

$$(50)\qquad \Sigma v(y^2+z^2),\quad \Sigma v(x^2+z^2),\quad \Sigma v(x^2+y^2);$$
$$\Sigma vyz,\qquad \Sigma vxz,\qquad \Sigma vxy.$$

La recherche des deux premières peut être remplacée par celle de leur somme et de leur différence

$$2\Sigma vz^2+\Sigma v(x^2+y^2),\qquad \Sigma v(x^2-y^2).$$

Nous substituerons donc aux trois premières évaluations les trois suivantes, qui seront plus avantageuses

$$\Sigma vz^2,\qquad \Sigma v(x^2+y^2),\qquad \Sigma v(x^2-y^2).$$

De là six questions à résoudre successivement.

La première est des plus simples. Il vient immédiatement

$$d\Sigma vz^2=\Sigma u\left(1+\frac{\xi}{\rho}\right)ds\,.\,z^2=ds\Sigma uz^2+\frac{ds}{\rho}\Sigma u\xi z^2.$$

Si donc nous employons ces notations analogues aux précédentes (N° 71)

$$l_2=\Sigma uz^2,\qquad l'_3=\Sigma u\xi z^2,$$

nous obtiendrons la valeur

$$(51)\qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vz^2=l_2+\frac{l'_3}{\rho}=\left(\lambda_2+\frac{\varphi}{\rho}\lambda'_3\right)\varphi^4\frac{ds}{d\theta},$$

dans laquelle il suffira de substituer les expressions différentielles de ρ et $\frac{ds}{d\theta}$ en fonction de F, F′, F″ pour que le problème se trouve ramené aux quadratures.

81. Nous avons en second lieu (52), (53)

$$d\Sigma v(x^2+y^2)$$
$$=\Sigma\{[r\cos\theta+\xi\sin(\theta+a)]^2+[r\sin\theta-\xi\cos(\theta+a)]\},$$
$$=r^2\Sigma v+2r\sin a\,\Sigma v\xi+\Sigma v\xi^2=n_0r^2+2n_1r\sin a+n_2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{ds}\Sigma v(x^2+y^2)=\left(n_0+\frac{m_1}{\rho}\right)r^2+2\left(m_1+\frac{m_2}{\rho}\right)r\sin a+\left(m_2+\frac{m_3}{\rho}\right).$$

Nous pouvons d'ailleurs (aussi bien dans cette circonstance que pour les évaluations qui suivront) invoquer les formules

$$(52)\qquad \sin a=r\frac{d\theta}{ds},\qquad \cos a=\frac{dr}{ds},$$

$$\sin 2a=2r\frac{dr}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2,\qquad \cos 2a=\frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r^2}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}.$$

Il vient donc, en multipliant par $\frac{ds}{d\theta}$

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma v(x^2+y^2)=\left(m_0+\frac{m_1}{\rho}\right)r^2\frac{ds}{d\theta}+2\left(m_1+\frac{m^2}{\rho}\right)r^2+\left(m_2+\frac{m_3}{\rho}\right)\frac{ds}{d\theta},$$

ou en fonction de φ

$$(53)\qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma v(x^2+y^2)=\left(\mu_0+\frac{\varphi}{\rho}\mu_1\right)\varphi^2r^2\frac{ds}{d\theta}$$
$$+2\left(\mu_1+\frac{\varphi}{\rho}\mu_2\right)\varphi^3r^2+\left(\mu_2+\frac{\varphi}{\rho}\mu_3\right)\varphi^4\frac{ds}{d\theta},$$

formule dans laquelle il suffit encore (aussi bien que pour les suivantes) de rendre à ρ et $\frac{ds}{d\theta}$ leurs valeurs différentielles en F, F', F''.

82. Il vient en troisième lieu

$$d\Sigma v(x^2-y^2)=n_0r^2\cos 2\theta+2n_1r\sin(2\theta+a)-n_2\cos(2\theta+2a),$$

et par suite

$$\frac{d}{ds}\Sigma v(x^2-y^2)=\left(m_0+\frac{m_1}{\rho}\right)r^2\cos 2\theta$$
$$+2\left(m_1+\frac{m_2}{\rho}\right)(r\sin a\cos 2\theta+\cos a\sin 2\theta)$$
$$+\left(m_2+\frac{m_3}{\rho}\right)(\sin 2a\sin 2\theta-\cos 2a\cos 2\theta),$$

c'est-à-dire, en multipliant par $\frac{ds}{d\theta}$, substituant les valeurs (52), et ramenant les intégrales m aux constantes μ

$$(54)\qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma v(x^2-y^2)=\left(\mu_0+\frac{\varphi}{\rho}\mu_1\right)\varphi^2r^2\frac{ds}{d\theta}\cos 2\theta$$
$$+2\left(\mu_1+\frac{\varphi}{\rho}\mu_2\right)\varphi^3r\left(\frac{dr}{d\theta}\sin 2\theta+r\cos 2\theta\right)$$
$$+\left(\mu_2+\frac{\varphi}{\rho}\mu_3\right)\varphi^4\left[2r\frac{\frac{dr}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}}\sin 2\theta+\frac{r^2-\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\frac{ds}{d\theta}\cos 2\theta\right].$$

83. Nous obtiendrons en quatrième lieu par une analyse absolument semblable

$$2d\Sigma xy=n_0r^2\sin 2\theta+2n_1r\cos(2\theta+a)+n_2\sin(2\theta+2a),$$

$$2\frac{d}{ds}\Sigma vxy=\left(m_0+\frac{m_1}{\rho}\right)r^2\sin 2\theta$$
$$-2\left(m_1+\frac{m_2}{\rho}\right)r(\sin a\sin 2\theta-\cos a\cos 2\theta)$$
$$+\left(m_2+\frac{m_3}{\rho}\right)(\sin 2a\cos 2\theta+\cos 2a\sin 2\theta),$$

et enfin [1]

$$(55)\qquad 2\frac{d}{d\theta}\Sigma vxy = \left(\mu_0 + \frac{\varphi}{\rho}\mu_1\right)\varphi^2 r^2 \frac{ds}{d\theta}\sin 2\theta$$

$$-2\left(\mu_1 + \frac{\varphi}{\rho}\mu_2\right)\varphi^3 r\left(r\sin 2\theta - \frac{dr}{d\theta}\cos 2\theta\right)$$

$$-\left(\mu_2 + \frac{\varphi}{\rho}\mu_3\right)\varphi^4\left[\frac{r^2 - \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\frac{ds}{d\theta}\sin 2\theta - 2r\frac{\frac{dr}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}}\cos 2\theta\right].$$

84. Il vient en cinquième lieu

$$d\Sigma vxz = r\cos\theta\,\Sigma vz + \sin(\theta + a)\,\Sigma v\zeta z,$$

$$= r\cos\theta\Sigma u\left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right)z + \sin(\theta + a)\,\Sigma u\left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right)\xi z,$$

$$= r\cos\theta\Sigma uz + \left[\frac{r}{\rho}\cos\theta + \sin(\theta + a)\right]\Sigma u\xi z + \frac{\sin(\theta + a)}{\rho}\Sigma u\zeta^2 z.$$

$$= \left(l_1 + \frac{l'_2}{\rho}\right)r\cos\theta + \left(l'_2 + \frac{l_3}{\rho}\right)(\sin a\cos\theta + \cos a\sin\theta),$$

$$= \left(\lambda_1 + \frac{\varphi}{\rho}\lambda'_2\right)\varphi^3 r\cos\theta + \left(\lambda'_2 + \frac{\varphi}{\rho}\lambda_3\right)\varphi^4\left(r\frac{d\theta}{ds}\cos\theta + \frac{dr}{ds}\sin\theta\right),$$

et enfin, en multipliant par $\frac{ds}{d\theta}$

$$(56)\qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vxz = \left(\lambda_1 + \frac{\varphi}{\rho}\lambda'^2\right)\varphi^3 r\frac{ds}{d\theta}\cos\theta$$

$$+\left(\lambda'_2 + \frac{\varphi}{\rho}\lambda^3\right)\varphi^4\left(r\cos\theta + \frac{dr}{d\theta}\sin\theta\right).$$

---

[1] Il faut remarquer que la valeur (55) concerne $2\Sigma vxy$, tandis que le facteur 2 n'accompagnera pas celles de Σvxz, Σvyz (56), (57).

85. On trouvera en sixième lieu par une marche identique

$$d\Sigma vyz = r \sin\theta\, \Sigma vz + \cos(\theta + a)\, \Sigma v\xi z\,,$$

$$\frac{d}{ds}\Sigma vyz = \left(l_1 + \frac{l'_2}{\rho}\right) r \sin\theta + \left(l'_2 + \frac{l_3}{\rho}\right)(\cos a \cos\theta - \sin a \sin\theta\,,$$

et en multipliant par $\frac{ds}{d\theta}$

$$(57) \qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vyz = \left(\lambda_1 + \frac{\varphi}{\rho}\lambda'_2\right)\varphi^3 r \frac{ds}{d\theta}\sin\theta$$
$$- \left(\lambda'_2 + \frac{\varphi}{\rho}\lambda_3\right)\varphi^4\left(r\sin\theta - \frac{dr}{d\theta}\cos\theta\right).$$

86. Les six formules (51 à 57), après que l'on y a substitué ρ et $\frac{ds}{d\theta}$ en F, F', F'', puis F et φ en θ, ramènent aux quadratures la détermination des six sommes auxquelles se réduit la recherche d'un moment d'inertie quelconque.

Elles renferment les intégrales définies

$$(58) \qquad \mu_1\,, \quad \mu_3\,, \quad \lambda_1\,, \quad \lambda'_2\,, \quad \lambda'_3\,;$$

et

$$\mu_0\,, \quad \mu_2\,, \quad \lambda_2\,;$$

qui devront être déduites de l'équation de la génératrice, lorsque celle-ci sera spécifiée dans chaque cas. Mais ces huit intégrales forment deux groupes bien distincts. Les cinq premières renferment au premier degré l'une au moins des coordonnées z, ξ. Elles s'annulent donc identiquement en cas de symétrie du profil générateur par rapport à l'axe perpendiculaire à cette coordonnée. Toutes les cinq disparaissent à la fois d'après cela, en cas de symétrie dans les quatre angles droits [1]. Au con-

---

[1] Par exemple, pour le cercle, qui est symétrique dans les quatre angles, on a, en prenant son rayon comme unité

$$\mu_1 = \mu_3 = \lambda_1 = \lambda'_2 = \lambda'_3 = 0\,, \quad \mu_0 = \pi\,, \quad \mu_2 = \lambda_2 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Ce cas prendra beaucoup d'importance (en dehors des §§ III et VII) dans les troisième et quatrième parties de ce mémoire, où il constituera le système *permanent* des valeurs des huit intégrales.

traire, les trois dernières intégrales ne sauraient jamais s'annuler, car elles expriment l'aire et deux moments d'inertie [1].

---

[1] Pour présenter un exemple comportant les huit intégrales, supposons que la génératrice soit la parabole

$$z = \xi^q,$$

(d'ordre positif quelconque, entier, fractionnaire ou incommensurable) dont le sommet soit placé au point I, en appelant b la base, et h l'ordonnée extrême du segment considéré. L'élément superficiel prend alors la valeur $u = d\xi dz$, et l'intégrale l'expression

$$\Sigma u z^i \xi^j = \int_0^b \xi^j d\xi \int_0^{\xi^q} z^i dz$$

$$= \frac{b^{(i+1)q+j+1}}{(i+1)\,[(i+1)\,q+j+1]} = \frac{h^{i+1}\,b^{j+1}}{(i+1)\,[(i+1)\,q+j+1]}.$$

Le tableau suivant résume les applications de cette formule à quatre exem-

Intégrales		Exposants		Facteur d'homogénéité	Rectangle	Triangle	Parabole du 2e degré	Seconde parabole cubique
		i	j		$q=0$	$q=1$	$q=\frac{1}{2}$	$q=\frac{3}{2}$
μ_0	Σu	0	0	bh	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
μ_1	$\Sigma u\xi$	0	1	b^2h	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$
λ_1	Σuz	1	0	bh^2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
μ_2	$\Sigma u\xi^2$	0	2	b^3h	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{9}$
λ'_2	$\Sigma u\xi z$	1	1	b^2h^2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
λ_2	Σuz^2	2	0	bh^3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
μ_3	$\Sigma u\xi^3$	0	3	bh^4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{11}$
λ'_3	$\Sigma u\xi^2 z$	1	2	b^3h^2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$

Pour conduire jusqu'au bout la présente analyse sans nous assujettir à la complication de nos six formules générales, nous conviendrons de nous réduire au cas de la disparition des cinq intégrales impaires. Dans ces conditions, les deux dernières dérivées (56) (57) s'annulent d'elles mêmes

$$(59) \qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vxz = 0\,, \qquad \frac{d}{d\theta}\Sigma vyz = 0\,;$$

et les quatre autres se simplifient de la manière suivante

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma vz^2 = \lambda_2\varphi^4\frac{ds}{d\theta}\,,$$

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma v(x^2+y^2) = \mu_0\varphi^2 r^2\frac{ds}{d\theta} + \mu_2\varphi^4\left(2\frac{r^2}{\rho} + \frac{ds}{d\theta}\right),$$

---

ples simples, à savoir: une horizontale, une droite inclinée passant par le point I, la parabole du second degré, la parabole semi-cubique (fig. 11).

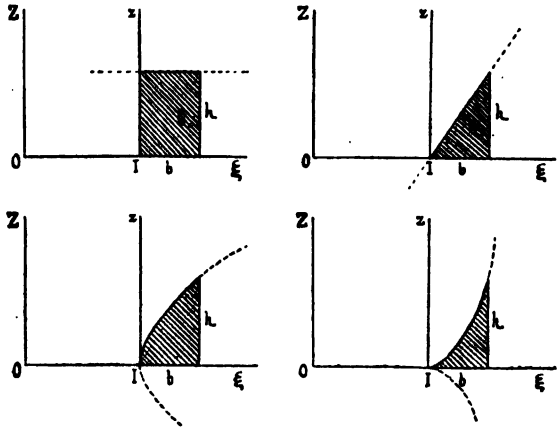

Fig. 11

Les deux premières colonnes présentent la désignation des huit intégrales qui figurent dans nos formules générales, et les deux suivantes les exposants correspondants. La cinquième renferme le facteur d'homogénéité, et les quatre dernières les valeurs numériques des coefficients pour les quatre exemples en question.

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma v(x^2-y^2)=\mu_0\varphi^2r^2\frac{ds}{d\theta}\cos 2\theta$$

$$+\mu_2\varphi^4\left\{2r\frac{dr}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\frac{ds}{d\theta}}\right)\sin 2\theta+\left[\frac{2r^2}{\rho}+\frac{r^2-\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\frac{ds}{d\theta}\right]\cos 2\theta\right\},$$

$$2\frac{d}{d\theta}\Sigma vxy=\mu_0\varphi^2r^2\frac{ds}{d\theta}\sin 2\theta$$

$$-\mu_2\varphi^4\left\{\left[\frac{2r^2}{\rho}+\frac{r^2-\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\right]\sin 2\theta-2r\frac{dr}{d\theta}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\frac{ds}{d\theta}}\right)\cos 2\theta\right\}.$$

§ XIII

Application aux nautiloïdes

87. Appliquons ces formules aux nautiloïdes à front normal, et génératrice quelconque.

Il vient en remplaçant φ par r, ou $e^{A\theta}$

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma vz^2=\frac{\lambda_2}{\sin a}e^{5A\theta},$$

d où, en intégrant entre le pôle et un point quelconque

$$\Sigma vz^2=\frac{\lambda_2}{5\cos a}e^{5A\theta}=\frac{\lambda_2 r^5}{5\cos a}.$$

Si nous considérons en particulier le tronçon qui s'étend du pôle au point I, nous aurons

$$(\Sigma vz^2)_1=\frac{\lambda_2}{5\cos a}.$$

On trouve en second lieu

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma v\,(x^2+y^2)=[\mu_0+\mu_2\,(1+2\sin^2 a)]\,\frac{e^{5A\theta}}{\sin a},$$

$$\Sigma v\,(x^2+y^2)=[\mu_0+\mu_2\,(1+2\sin^2 a)]\,\frac{e^{5A\theta}}{5\cos a},$$

$$(60)\qquad [\Sigma v\,(x^2+y^2)]_1=\frac{\mu_0+\mu_2\,(1+2\sin^2 a)}{5\cos a}.$$

En troisième lieu:

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma v\,(x^2-y^2)=\Big\{2\mu_2\sin 2a\sin 2\theta$$

$$+[\mu_0+(4\sin^2 a-1)\,\mu_2]\cos 2\theta\Big\}\,\frac{e^{5A\theta}}{\sin a},$$

et par suite

$$\Sigma v\,(x^2-y^2)=4\mu_2\cos a\int_{-\infty}^{\theta}e^{5A\theta}\sin 2\theta d\theta$$

$$+\frac{\mu_0+(4\sin^2 a-1)\,\mu_2}{\sin a}\int_{-\infty}^{\theta}e^{5A\theta}\cos 2\theta d\theta.$$

Rien de plus facile, encore une fois, que d'effectuer ces intégrations (N° 72), mais je préfère remarquer qu'en raison de la similitude, l'ellipsoïde de Poinsot relatif au pôle pour le tronçon variable, fait partie de l'édifice géométrique entrainé par le point directeur de son azimut terminal. Il suffit donc d'en obtenir la détermination pour un seul tronçon, par exemple celui qui aboutit en I ($\theta=0$). Une fois celui-ci connu, il suffirait, pour tout autre limité à un point quelconque M, d'y faire passer l'axe polaire, auquel on rapporterait cette nouvelle figure. Elle se retrouverait alors dans les conditions identiques aux précédentes, sauf les dimensions absolues; et le nouveau moment d'inertie serait à l'ancien dans le rapport des cinquièmes puissances des rayons-limites.

Nous n'avons donc qu'à effectuer les intégrations entre $-\infty$

et zéro. Or ces deux quadratures ont pour expressions

$$\int_{-\infty}^{0} e^{5A\theta} \sin 2\theta d\theta = -\frac{2 \sin^2 a}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a},$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{5A\theta} \cos 2\theta d\theta = \frac{5 \sin a \cos a}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a}.$$

Il vient d'après cela

$$(4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a)\,[\Sigma v\,(x^2 - y^2)]_1 =$$

$$-2 \sin^2 a \,.\, 4\mu_2 \cos a + 5 \sin a \cos a \frac{\mu_0 + (4 \sin^2 a - 1)\,\mu_2}{\sin a},$$

ou en réduisant

$$[\Sigma v\,(x^2 - y)]_1 = \frac{[5\mu_0 + (12 \sin^2 a - 5)\mu_2] \cos a}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a}.$$

Une analyse toute semblable donnera d'autre part

$$(2\Sigma vxy)_1 = \frac{[-2\mu_0 + 6\,(3 \sin^2 a - 2)\,\mu_2] \sin a}{4 \sin^2 a + 25 \cos^2 a}.$$

88. Si nous voulons déterminer les axes principaux d'inertie du pôle pour un bloc nautiloïde, de génératrice quelconque, il suffira, d'après la remarque précédente, de le faire pour le tronçon OI; leur disposition angulaire par rapport au front normal du point terminus restant immuable et liée à l'édifice géométrique de ce point.

Remarquons tout d'abord que l'un d'eux est l'axe zénithal lui-même. Nous avons trouvé en effet (N° 86) pour les deux intégrales qui s'y rapportent des dérivées nulles (59), entraînant des intégrales générales constantes, et des intégrales définies nulles

$$\Sigma vxz = 0\,, \qquad \Sigma vyz = 0\,,$$

ce qui est le caractère d'un axe principal OZ.

Les deux autres seront dès lors les axes de symétrie de l'ellipse suivant laquelle l'équateur coupe l'ellipsoïde de Poinsot. Or le calcul classique de la réduction d'une ellipse à ses axes

donne pour l'angle α que fait l'un d'eux avec OI la valeur

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{(2\Sigma vxy)_1}{[\Sigma v(x^2-y^2)]_1} = \operatorname{tang} a . \frac{-2\mu_0 + 6(3\sin^2 a - 2)\mu_2}{5\mu_0 + (12\sin^2 a - 5)\mu_2}.$$

Si par exemple on envisage en particulier la plus simple des spirales logarithmiques, celle de 45 degrés, il vient avec une génératrice quelconque

$$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{2\mu_0 + 3\mu_2}{5\mu_0 + \mu_2},$$

et si celle-ci est un cercle (N° 86, note 1) comme dans le nautile

$$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{11}{21}, \qquad \alpha = 13^\circ\, 49'\, 22'',75 .$$

§ XIV

Front oblique

89. Dans ces théories relatives au volume, au centre de gravité et au moment d'inertie, nous avons essentiellement supposé le front normal, avec une entière généralité d'ailleurs en ce qui concerne la directrice, la génératrice, et la loi de similitude. Nous pouvons maintenant nous affranchir de cette restriction, et rendre à la loi d'inclinaison frontale toute son indépendance.

Considérons en effet (fig. 12) le front MF mené sous un angle

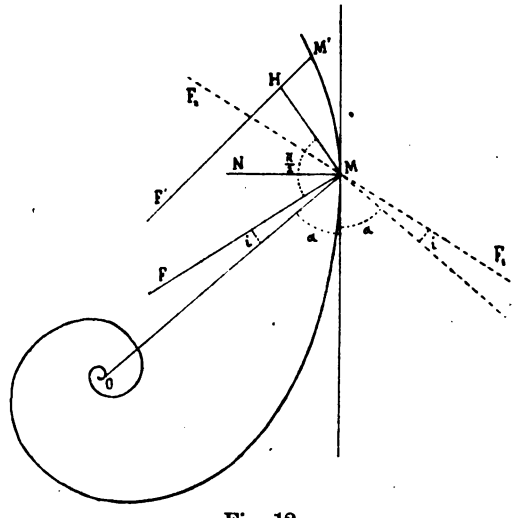

Fig. 12

quelconque

$$i = \psi(\theta),$$

par rapport au rayon vecteur OM; et soit M'F' un front infiniment rapproché. L'épaisseur élémentaire de la tranche, mesurée en M, sera MH perpendiculaire à ces droites, et l'on aura dans le triangle rectangle HMM'

$$\mathrm{MH} = \mathrm{MM'} \cos \mathrm{HMM'} = ds \cos\left(\mathrm{MM'F} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(i + a),$$

ou d'après la valeur de a

$$\mathrm{MH} = ds \sin\left[\psi(\theta) + \operatorname{arc\,tang} \frac{\mathrm{F}(\theta)}{\mathrm{F}'(\theta)}\right].$$

Dans les théories précédentes, l'épaisseur de la tranche en O était exprimée par ds. Il nous suffit donc, pour passer d'un cas à l'autre, d'introduire dans toutes les expressions différentielles auxquelles nous nous sommes trouvés conduits, le *multiplicateur*

$$\sin\left(\psi + \operatorname{arc\,tang} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'}\right). \tag{61}$$

Je ne saurais, bien entendu, reprendre avec cette modification la série des calculs et des discussions qui précèdent. Je me bornerai à en montrer l'application sur les deux exemples suivants.

90. Adoptons comme directrice un cercle passant par l'origine

$$r = \mathrm{F}(\theta) = \mathrm{C} \cos \theta,$$

et supposons un front *valsant*, c'est-à-dire exécutant autour de la verticale du point décrivant M une gyration proportionnelle à la rotation du rayon vecteur

$$i = \psi(\theta) = m\theta.$$

Supposons enfin que la surface soit vectorielle du premier ordre. Tout se trouve ainsi déterminé, à l'exception de la génératrice qui reste quelconque. Nous la supposerons cependant centrée, pour obtenir plus de simplicité dans les résultats.

Il vient dans ces conditions

$$\frac{F}{F'} = -\cot\theta, \qquad \text{arc tang}\,\frac{F}{F'} = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Le multiplicateur (61) devient donc

$$\sin\left[m\theta + \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right] = \cos(m+1)\theta.$$

Je signalerai tout d'abord une dualité qui associe deux par deux des allures valsantes distinctes aboutissant aux mêmes résultats. Supposons une nouvelle vitesse angulaire m' qui satisfasse à la condition

$$m' + 1 = -(m+1).$$

Le multiplicateur ne sera en rien modifié, non plus par conséquent que les conclusions de l'analyse. Or cette relation nous donne

$$m' = -(m+2).$$

Le nouveau problème se rapport donc à une rotation de sens contraire, dont la valeur absolue est modifiée dans le rapport de $m+2$ à m.

91. Effectuons l'intégration. La formule (38) qui exprime le volume devient, par l'adjonction du multiplicateur (61), et en tenant compte de ce que la section génératrice est centrée ($\xi'_1 = 0$)

$$dV = U_1\varphi^2 \cos(m+1)\theta . ds.$$

Or nous avons pris

$$r = C\cos\theta, \qquad \varphi = \frac{r}{C}\cos\theta, \qquad ds = Cd\theta;$$

$$\frac{dV}{d\theta} = U_1 C \cos^2\theta \cos(m+1)\theta,$$

$$\frac{2}{U_1 C}\frac{dV}{d\theta} = (1 + \cos 2\theta)\cos(m+1)\theta,$$

$$\frac{4}{U_1 C}\frac{dV}{d\theta} = 2\cos(m+1)\theta + \cos(m+3)\theta + \cos(m-1)\theta,$$

et en intégrant entre les points I et M, c'est-à-dire de 0 à θ

$$\frac{4}{U_1C}V = \frac{2}{m+1}\sin(m+1)\theta$$

$$+\frac{1}{m+3}\sin(m+3)\theta + \frac{1}{m-1}\sin(m-1)\theta.$$

Il faut toutefois faire exception pour les trois hypothèses qui annulent quelqu'un des dénominateurs

$$m = 1, \qquad m = -1, \qquad m = -3.$$

La première $m = 1$ donne directement

$$\frac{4}{U_1C}\frac{dV}{d\theta} = 1 + 2\cos 2\theta + \cos 4\theta,$$

$$\frac{4}{U_1C}V = \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta.$$

La dernière $m = -3$ constitue précisément avec celle-ci le cas de dualité, et fournit le même résultat.

La seconde hypothèse $m = -1$ donne de son côté

$$\frac{4}{U_1C}\frac{dV}{d\theta} = 2 + 2\cos 2\theta,$$

$$\frac{4}{U_1C}V = 2\theta + \sin 2\theta.$$

Elle se confond d'ailleurs avec son propre cas de dualité. On remarquera que le front fait alors, à l'extrémité M du rayon vecteur, un angle alterne-interne égal à celui que forme, en l'autre extrémité O, l'axe polaire. Il reste donc parallèle à lui-même, et l'on se trouve dans le cas déjà signalé (N° 5, note 1).

92. Généralisons l'analyse précédente en substituant à la directrice circulaire la spirale sinusoïde dont elle n'est qu'un cas particulier

$$r^n = C^n \cos n\theta.$$

Nous étendrons de même la loi de similitude en supposant une

surface vectorielle d'ordre quelconque p

$$\varphi = \left(\frac{r}{C}\right)^p = \cos^{\frac{p}{n}} n\theta .$$

Il vient dans ces conditions

$$ds = C \cos^{\frac{1}{n}-1} n\theta \, d\theta , \qquad a = \frac{\pi}{2} - n\theta ,$$

$$\sin\left(\psi + \operatorname{arc\,tang} \frac{F}{F'}\right) = \cos(n\theta - \psi) .$$

L'expression (38) du volume (de section centrée) devient, en la complétant par ce multiplicateur

$$dV = U_1 \varphi^2 ds \cos(n\theta - \psi) ,$$

$$\frac{1}{U_1 C} \frac{dV}{d\theta} = \cos^{\frac{2p-n+1}{n}} n\theta \cos(n\theta - \psi) ,$$

quelle que soit la loi ψ de l'inclinaison frontale.

93. Signalons de nouveau une dualité analogue à celle que nous avons déjà rencontrée.

Relions à cet effet à la loi quelconque ψ, une nouvelle allure valsante par la condition

$$(n\theta - \psi_1) = -(n\theta - \psi) .$$

Le multiplicateur ne sera pas modifié, non plus que les résultats. Or on déduit de là

$$\psi_1 = 2n\theta - \psi = \pi - (\psi + 2a) . \tag{62}$$

Traçons d'après cela en MF_1 le symétrique de MF par rapport à la tangente MA, et prolongeons-la en sens contraire suivant MF_2. Nous obtiendrons en F_1MA l'angle $\psi + a$, et en F_1MO : $\psi + 2a$; par conséquent en OMF_2 : $\pi - (\psi + 2a)$. Le front conjugué est donc le symétrique du proposé par rapport à la tangente de la directrice.

94. Faisons maintenant certaines hypothèses sur la loi d'inclinaison frontale ψ.

Je suppose en premier lieu que le plan de la génératrice soit assujetti à rester symétrique de la tangente à la directrice par rapport au rayon vecteur. Il vient alors

$$i = a, \qquad \phi = \frac{\pi}{2} - n\theta, \qquad n\theta - \phi = 2n\theta - \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(n\theta - \phi) = \sin 2n\theta = 2 \sin n\theta \cos n\theta,$$

$$\frac{1}{2U_1C}\frac{dV}{d\theta} = \cos^{\frac{2p+1}{n}} n\theta \sin n\theta,$$

d'où en intégrant de zéro à θ

$$\frac{2p+n+1}{2nU_1C} V = 1 - \cos^{2p+n+1} n\theta = 1 - \left(\frac{r}{C}\right)^{2p+n+1},$$

solution d'une complète généralité, quel que soit l'ordre de la spirale sinusoïde.

La combinaison conjuguée (62) sera

$$\phi_1 = 3n\theta - \frac{\pi}{2}\pi = -3a.$$

Ce nouveau front est symétrique du précédent par rapport à la tangente, et il posséde une vitesse de rotation triple de celle du premier, mais en sens contraire.

95. Comme second exemple, envisageons le front méridien $\phi = 0$. Il vient alors

$$\frac{1}{2U_1C}\frac{dV}{d\theta} = \cos^{\frac{2p+1}{n}} n\theta.$$

La solution conjuguée est dans ce cas

$$\phi_1 = 2n\theta = \pi - 2a.$$

Le nouveau front reste donc symétrique du rayon vecteur par rapport à la tangente.

L'intégration ne peut plus, comme dans le cas précédent, s'effectuer d'une manière générale. On la réussira du moins lorsque l'exposant sera un nombre entier N, positif ou négatif.

Cette condition

$$\frac{2p+1}{n} = N, \qquad p = \frac{Nn-1}{2}, \qquad n = \frac{2p+1}{N},$$

peut toujours être remplie pour une spirale quelconque en lui adjoignant un ordre vectoriel convenable, ou réciproquement.

Contentons-nous à cet égard de l'unique hypothèse

$$N = 1, \qquad p = \frac{n-1}{2}, \qquad n = 2p+1.$$

Il vient alors, pour une spirale d'ordre quelconque n associée à une loi vectorielle d'exposant $\frac{n-1}{2}$

$$\frac{1}{2_1UC}\frac{dV}{d\theta} = \cos n\theta, \qquad \frac{n}{2U_1C}V = \sin n\theta;$$

ou inversement, pour une loi vectorielle p, appliquée à la spirale sinusoïde d'ordre $2p+1$

$$\frac{1}{2U_1C}\frac{dV}{d\theta} = \cos(2p+1)\theta, \qquad \frac{2p+1}{2U_1C}V = \sin(2p+1)\theta.$$

Cette hypothèse donne par exemple pour le cercle ($n=1$), la loi de similitude $p=0$, c'est-à-dire un annean-tube; et de même, pour la ligne droite ($n=-1$) la similitude $p=-1$, s'exerçant en raison inverse du rayon vecteur.

§ XV

Coordonnées intrinsèques

96. On connait l'élégance et l'utilité de l'*équation naturelle* des lignes planes

$$\rho = F(\varepsilon),$$

qui les représente à l'aide d'une relation entre leurs *coordonnées intrinsèques,* à savoir le rayon de courbure ρ et l'angle de contingence ε évalué à partir d'une tangente fixe. Leur emploi permet de traiter avec facilité des courbes qui seraient souvent inabordables par d'autres voies.

Il semble en particulier que l'on doive en attendre ici un utile secours, puisque nos formules générales renferment en évidence le rayon de courbure ρ et l'arc ds de la directrice, relié à ε par les formules

$$(63) \qquad ds = \rho d\varepsilon, \qquad s = \int_0^\varepsilon F(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Il conviendra naturellement de se donner alors en fonction de la même variable ε la loi de similitude $\varphi(\varepsilon)$, et celle $\psi(\varepsilon)$ de l'inclinaison frontale. La génératrice seule restera comme ci-dessus représentée dans le plan de front par son équation ordinaire entre z et ξ; mais nous savons que celle-ci n'intervient que pour l'évaluation des diverses intégrales définies λ, μ.

La formule générale du volume (38) devient dès lors

$$(64) \qquad \frac{dV}{d\varepsilon} = U_1 (F + \xi'\varphi)\varphi^2.$$

Le genre de similitude le plus naturel, dans ces nouvelles conditions, consiste à supposer que les dimensions de la génératrice varient comme une puissance arbitraire p du rayon *de courbure* de la directrice

$$\varphi = F^p.$$

Il vient alors

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = U_1 (F^{2p+1} + \xi' F^{3p}).$$

On aura en particulier pour le premier ordre du genre de similitude

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = U_1 (1 + \xi') F^3,$$

ou, en représentant en abrégé par C la constante

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = CF^3, \qquad V = C \int_0^\varepsilon F^3(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Je me bornerai, pour les applications qui suivent, à cette formule simple; mais toutes les intégrations réussiraient encore, bien qu'avec plus de complication, pour une puissance quelconque p du rayon de courbure.

97. Considérons la développante de cercle d'ordre quelconque q, rapportée, ainsi que toutes celles des ordres qui précèdent, à un même point de la circonférence, qui constitue leur point de rebroussement commum

$$\rho = \varepsilon^q, \qquad s = \frac{\varepsilon^{q+1}}{q+1},$$

$$V = C\int_0^\varepsilon \varepsilon^{3q}\,d\varepsilon = \frac{C}{3q+1}\varepsilon^{3q+1} = \frac{q+1}{3q+1}C\rho^2 s.$$

Il vient pour l'épicycloïde ou l'hypocycloïde d'ordre quelconque q entier, fractionnaire, ou incommensurable [1], rapportée à son sommet

$$\rho = \cos q\varepsilon, \qquad s = \frac{1}{q}\sin q\varepsilon,$$

$$(65) \qquad V = C\int_0^\varepsilon \cos^3 q\varepsilon dr = \frac{C}{4}\int_0^\varepsilon (\cos 3q\varepsilon + 3\cos q\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$= \frac{C}{3q}\sin q\varepsilon\,(3 - \sin^2 q\varepsilon) = \frac{C}{3}(\rho^2 + 2)\,s.$$

Considérons encore la chainette rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\varepsilon}, \qquad s = \operatorname{tang}\varepsilon,$$

$$V = C\int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon}{\cos^6\varepsilon} = \frac{C}{15}(15\operatorname{tang}\varepsilon + 10\operatorname{tang}^3\varepsilon + 3\operatorname{tang}^5\varepsilon)$$

$$= \frac{Cs}{15}(15 + 10s^2 + 3s^4).$$

La tractrice, qui en est la développante, a pour équation rapportée à son point de rebroussement

$$\rho = \operatorname{tang}\varepsilon, \qquad s = -\operatorname{Log}\cos\varepsilon,$$

$$V = C\int_0^\varepsilon \operatorname{tang}^3\varepsilon\,d\varepsilon = \frac{C}{2}(\operatorname{tang}^2\varepsilon + 2\operatorname{Log}\cos\varepsilon) = \frac{C}{2}(\rho^2 - s).$$

---

(1) La valeur $q = 1$ correspond à la cycloïde.

Soit enfin la chainette d'égale résistance rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos\varepsilon}, \qquad s = \text{Log tang}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$V = C\int_0^\varepsilon \frac{d\varepsilon}{\cos^3\varepsilon} = \frac{C}{2}\left[\frac{\sin\varepsilon}{\cos^2\varepsilon} + \text{Log tang}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{C}{2}(\rho\sqrt{\rho^2 - 1} + s).$$

98. Si, au lieu d'un front normal, nous supposons une inclinaison quelconque $\phi(\varepsilon)$ *sur la normale* (1), le multiplicateur à introduire (N° 89) sera simplement $\cos\phi$, et l'expression générale du volume deviendra

$$V = C\int_0^\varepsilon F^3(\varepsilon)\cos[\phi(\varepsilon)]\,d\varepsilon.$$

Bornons nous à l'exemple de l'épicycloïde, avec mouvement valsant de même module qu'elle

$$\phi(\varepsilon) = \cos q\varepsilon,$$

il viendra (65)

$$V = C\int_0^\varepsilon \cos^4 q\varepsilon d\varepsilon = \frac{C}{32\,q}(\sin 4q\varepsilon + 8\sin 2q\varepsilon + 3q\varepsilon)$$

$$= \frac{C}{32q}(8\sin q\varepsilon\cos^3 q\varepsilon + 12\sin q\varepsilon\cos q\varepsilon + 3q\varepsilon)$$

$$= \frac{C}{32}(8s\rho^3 + 12s\rho + 3\varepsilon).$$

99. Passons maintenant à la recherche du centre de gravité. La question se complique alors, car l'emploi des coordonnées intrinsèques exclut (et c'est ordinairement son avantage spécial) le recours à des repéres extérieurs pris dans le plan de la courbe. Or ils nous sont indispensables pour y rapporter le centre de gravité du volume engendré. Nous tournerons la dif-

(1) Et non plus sur le rayon vecteur des coordonées polaires, qui ont disparu de la question.

ficulté en rattachant ce centre à la tangente et à la normale du point pris pour origine des angles de contingence.

Le volume d'un tronçon V du corps nous est connu en fonction de ε par la formule générale (65). La tranche dV en sera la différentielle. Le centre de gravité g de cet élément et sa projection équatoriale g_0 nous sont également connus par leur abscisse ξ'' (49) dans le plan de front (fig. 13)

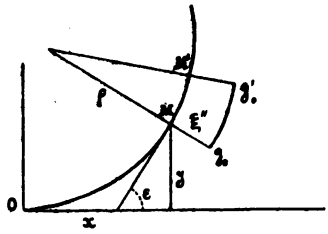

Fig. 13

$$\xi'' = \varphi \frac{\mu_1 \rho + \mu_2 \varphi}{\mu_0 \rho + \mu_1 \varphi},$$

et comme φ a été remplacé par ρ (N° 96)

$$\xi'' = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_0 + \mu_1} F.$$

L'abscisse de g_0 sera donc $x + \xi'' \sin \varepsilon$, c'est-à-dire

$$x + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_0 + \mu_1} F \sin \varepsilon,$$

et sa différentielle

$$dx + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_0 + \mu_1} (F' \sin \varepsilon + F \cos \varepsilon) d\varepsilon,$$

ou, en remplaçant dx par $ds \cos \varepsilon = \rho \cos \varepsilon \, d\varepsilon$

$$[(\mu_1 + \mu_2) F' \sin \varepsilon + (\mu_0 + 2\mu_1 + \mu_2) F \cos \varepsilon] \frac{d\varepsilon}{\mu_0 + \mu_1}.$$

Si nous condensons la masse dV en son centre de gravité g, son moment élémentaire par rapport à la normale initiale sera

$$dMy = \left(x + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_0 + \mu_1} F \sin \varepsilon\right) dV,$$

ce qui donne, en intégrant par parties à l'aide de la différen-

tielle dont nous avons formé ci-dessus l'expression

$$My = \left(x + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_0 + \mu_1} F \sin \varepsilon\right) V$$

$$- \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \int_0^\varepsilon V \left[(\mu_1 + \mu_2) F' \sin \varepsilon + (\mu_0 + 2\mu_1 + \mu_2) F \cos \varepsilon\right] d\varepsilon .$$

attendu que le terme explicite s'annule avec V pour la limite inférieure de l'intégration. Comme d'ailleurs

$$x = \int_0^\varepsilon F \cos \varepsilon d\varepsilon ,$$

la recherche de My (c'est-à-dire du produit par V de l'abscisse du centre de gravité G de ce volume) revient finalement à la détermination des deux quadratures

$$\int_0^\varepsilon VF' \sin \varepsilon d\varepsilon , \qquad \int_0^\varepsilon VF \cos \varepsilon d\varepsilon ,$$

dans lesquelles on aura préalablement substitué pour V sa valeur déduite de l'équation (64).

La recherche de l'ordonnée de G par rapport à la tangente initiale dépendra elle-même de ces deux autres intégrales définies

$$\int_0^\varepsilon VF' \cos \varepsilon d\varepsilon , \qquad \int_0^\varepsilon VF \sin \varepsilon d\varepsilon .$$

100. Considérons comme application l'épicycloïde.

Nous avons trouvé (65), pour le volume correspondant, la somme de deux termes en $\sin q\varepsilon$ et $\sin^3 q\varepsilon$. Les quatre quadratures précédentes nous présenteront donc, diversement associés, les facteurs $\sin \varepsilon$, $\cos \varepsilon$, $\sin q\varepsilon$, $\cos q\varepsilon$, $\sin^3 q\varepsilon$. Or pourrait même leur adjoindre un multiplicateur de la forme $\cos m\varepsilon$, si l'on voulait attribuer au front un mouvement valsant d'une allure quelconque. Or de tels produits peuvent toujours, par les moyens élémentaires, être décomposés en simples sinus ou cosinus de multiples de ε, dont l'intégration sera immédiate.

On en pourrait dire autant pour la développante de cercle d'ordre quelconque, à l'aide de formules connues d'intégration.

TROISIEME PARTIE

Surfaces sphérales

§ XVI

Surfaces enveloppes

101. Nous avons déjà rencontré deux types de surfaces se rapprochant, bien qu'à des degrés différents, de l'aspect extérieur du genre *Nautilus* que nous présente la nature vivante (§ III, § VII). Nous pouvons faire un pas de plus vers cette assimilation.

Il ne saurait suffire, pour que des surfaces méritent le nom de *corps ronds*, qu'elles présentent (comme les quadriques par exemple) des systèmes de stries circulaires. Cette dénomination doit être réservée en propre aux surfaces de révolution, qui peuvent être travaillées sur le tour. Mais on pourrait appeler *corps arrondis* ceux qui, le long de chacune de telles sections circulaires, admettent une sphère de raccordement. Ils se présentent d'après cela comme des *enveloppes de sphères*. Nous nous proposerons d'en constituer une pour le but qui nous occupe, sous le nom de *sphéro-nautile*. Mais il convient auparavant d'élargir cette question des enveloppes.

102. Supposons qu'une surface quelconque

$$f(x, y, z) = 0, \tag{66}$$

se meuve dans l'espace sous la double condition de varier homothétiquement par rapport au point qui sert actuellement d'origine pour l'équation (66), en même temps que ce centre de similitude décrira, pour son propre compte, une directrice quelconque représentée, par rapport aux axes fixes, par les deux relations

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \qquad F_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \tag{67}$$

La loi de similitude reste elle même arbitraire, définie à chaque instant par la fonction

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma). \tag{68}$$

Cherchons l'enveloppe ainsi engendrée.

Je commence par construire une surface homothétique à la proposée, par rapport à l'origine et dans le rapport voulu

$$f\left(\frac{x}{\varphi}, \frac{y}{\varphi}, \frac{z}{\varphi}\right) = 0.$$

Puis je la transporte parallèlement à elle-même jusqu'à la position correspondante du point directeur (α, β, γ)

$$(69) \qquad f\left(\frac{x-\alpha}{\varphi}, \frac{y-\beta}{\varphi}, \frac{z-\gamma}{\varphi}\right) = 0.$$

Nous obtenons ainsi l'une des *enveloppées.*

Nous en aurions une autre en récrivant la même formule après avoir attribué aux paramètres des valeurs $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$. L'intersection de ces deux enveloppées fournirait alors une courbe, que nous appellerons *caractéristique*, et dont la surface cherchée sera le lieu géométrique.

Or dans les calculs à effectuer sur ces deux relations, nous pouvons substituer à la seconde la différentielle de la première prise par rapport à α, β, γ, en traitant x, y, z comme des constantes. Appelons (70) l'égalité ainsi obtenue. D'ailleurs les différentielles $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, n'y sont pas indépendantes, mais liées par l'obligation, pour le centre de similitude, de suivre la directrice. Nous devons donc également différentier les deux conditions (67), en vue d'éliminer entre ces trois formules différentielles les deux rapports de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, qui figurent au premier degré. Désignons de même par (71) l'égalité obtenue en annulant le déterminant de ce système. La caractéristique sera dès lors représentée par les formules (69) et (71).

Pour en obtenir le lieu géométrique, il suffira d'éliminer α, β, γ entre cette relation et les deux condilions (67). L'équation résultante en x, y, z, représentera l'enveloppe cherchée.

103. Supposons spécialement que la surface génératrice (66) soit une quadrique. L'équation (69) étant du second degré par rapport aux binômes $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$, si on la multiplie par φ^2, la partie de degré supérieur ne renfermera plus ce rapport de similitude; celle du premier degré se trouvera multipliée par φ, et le terme indépendant par φ^2. La différentielle (70) relative à α, β, γ sera par conséquent une rel0tion du premier degré en $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$. Il en sera de même de celle (71) que l'on en déduit en chassant les rapports différentiels. Je la représen-

terai en abrégé par

$$P = 0. \tag{72}$$

La caractéristique est donc alors une courbe plane, c'est-à-dire une conique; et par conséquent l'enveloppe admet un système de sections planes du second degré.

104. Formons actuellement, avec un paramètre arbitraire λ, l'équation générale

$$f + \lambda P^2 = 0, \tag{73}$$

en représentant en abrégé par f l'expression (69). Nous constituons de cette manière une surface très générale du second degré, dont la rencontre avec l'enveloppée (69) se fait précisément suivant la caractéristique, attendu que la combinaison des deux équations (73) et (69) donne $P^2 = 0$. On reconnait en outre qu'il y a raccordement des deux surfaces suivant cette courbe, puisque leur intersection se fait dans un plan double.

Nous voyons ainsi que l'enveloppe cherchée des surfaces (69) est en même temps l'enveloppe de chacune des familles en nombre infini (73), qui sont définies individuellement par la série des valeurs numériques attribuées arbitrairement à λ.

105. Mais parmi cette infinité de familles, une seule nous intéressera ici. C'est celle des cônes circonscrits suivant la caractéristique à la quadrique mobile, pour chacun des instants de sa déformation. Cherchons donc la valeur bien déterminée de λ qui fournit cette famille spéciale.

Nous devons pour cela exprimer que la quadrique (73) passe par son propre centre. Ce point s'obtient en égalant à zéro les trois dérivées partielles de la fonction (73) relatives à x, y, z. Appelons (74) ce système d'équations du premier degré.

Si nous reportons dans la relation (73) les valeurs qu'il nous fournit pour les coordonnées du centre, nous déduirons de l'égalité ainsi formée la valeur spéciale λ_0 qui fournit des cônes. En attribuant alors cette valeur au paramètre de la relation générale (73), nous obtiendrons finalement l'équation

$$f + \lambda_0 P^2 = 0, \tag{75}$$

qui représente la famille des cônes circonscrits.

106. Il nous est facile de trouver le lieu géométrique de leurs sommets.

Les coordonnées x, y, z de chacun d'eux sont en effet reliées par les trois équations (74) réunies aux deux conditions (67) régissant les paramètres α, β, γ. Si, entre ces cinq relations, on élimine ces trois derniers, il restera entre x, y, z les deux équations du lieu cherché.

On sait d'ailleurs qu'il n'est pas autre que celui des pôles du plan de la caractéristique par rapport à l'enveloppée qui le contient.

107. Supposons actuellement que la quadrique (66) soit *à centre;* et adoptons ce point C comme centre d'homothétie.

Je considère la surface variable dans deux positions quelconques, de centres C, C′; et je trace la droite CC′. Elle aura pour projections sur les trois axes $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$. L'équation (66) ne possédant pas de termes du premier degré en x, y, z, si l'on multiplie la formule (69) par φ^2, cette fonction φ n'affectera que le terme indépendant. La partie du second degré sera dès lors la même pour cette égalité et celle dans laquelle α, β, γ auront été remplacés par α', β' γ'. Elle disparaitra donc si nous retranchons ces deux formules l'une de l'autre. Il ne restera, en ce qui concerne x, y, z, que les termes du premier degré de (69), dans les coefficients desquels α, β, γ seraient remplacés par $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$. L'intersection des deux quadriques est donc plane.

Si l'on effectue à l'aide de la formule de Taylor le passage de (66) à (69), les coefficients de x, y, z au premier degré seront respectivement

$$f'_x(\alpha, \beta, \gamma), \qquad f'_y, \qquad f'_z.$$

Ceux de l'équation de l'intersection deviendront donc

$$f'_x(\alpha' - \alpha, \beta' - \beta, \gamma' - \gamma), \qquad f'_y, \qquad f'_z.$$

Or on sait que ces quantités sont proportionnelles aux cosinus directeurs du plan diamétral conjugué de la direction qui a pour composantes $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$, c'est-à-dire de la ligne CC′, ou de la droite des centres. Telle est donc la direction du plan de l'intersection des deux quadriques.

108. Plaçons maintenant C et C′ en deux points infiniment voisins sur la directrice (67). La droite CC′ en deviendra la

tangente. Par conséquent, durant le mouvement qui engendre l'enveloppe, le plan de la caractéristique reste à chaque instant conjugué, dans la quadrique enveloppée, de celui de ses diamètres qui est tangent à la directrice.

Nous savons d'ailleurs que ce diamètre contient le sommet du cône circonscrit suivant cette caractéristique. Le lieu du sommet de ce cône, que nous avons appris à déterminer (n.° 106) est donc une ligne tracée sur la surface développable qui a la directrice pour arête de rebroussement, et se trouve formée par l'ensemble des tangentes de cette courbe.

§ XVII

Surfaces sphérales

109. Supposons enfin que la quadrique mobile devienne une sphère, dont le centre parcourt la directrice proposée.

Les surfaces enveloppes de sphères, que nous appellerons plus brièvement *sphérales*, ont fait l'objet de beaux travaux. Nous nous restreindrons ici au point de vue spécial de nos recherches, et notamment nous n'envisagerons, de ces surfaces, que la nappe réelle.

Remarquons avant tout que les caractéristiques étant planes, seront toujours des cercles.

Si nous prenons l'équation originelle (66) de la surface sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{76}$$

l'enveloppée (69) deviendra

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \varphi^2(\alpha, \beta, \gamma), \tag{77}$$

et sa différentielle relative aux trois paramètres

$$\begin{aligned}(x-\alpha)\,d\alpha + (y-\beta)\,d\beta + (z-\gamma)\,d\gamma \\ + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,d\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\,d\gamma\right)\varphi = 0.\end{aligned} \tag{78}$$

Elle représente la caractéristique, une fois que l'on en a chassé les rapports différentiels de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, déduits de la différentiation des relations (67). Or les coefficients des coordonnées

courantes x, y, z sont précisement ces trois éléments. On voit donc que le plan de la caractéristique est perpendiculaire à la tangente à la directrice au point occupé sur cette courbe par le centre de la sphère variable. C'était d'ailleurs facile à prévoir, puisqu'il est (n.° 108) parallèle au plan diamétral conjugué de cette tangente.

110. Toutefois ce plan ne passe pas par le point directeur. Il s'en trouve à une distance h mesurée suivant la tangente, qui a pour valeur

$$h = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,d\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\,d\gamma\right)\varphi}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}.$$

Cette expression représente dès lors la hauteur du cône qui a pour sommet le centre de la sphère, et pour génératrices les normales de cette dernière le long de la caractéristique.

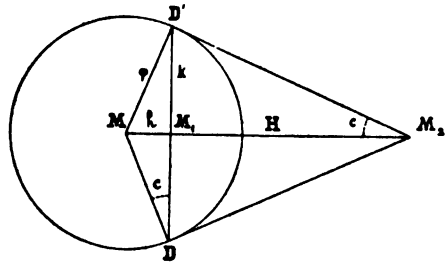

Fig. 14

L'angle c qu'elles font avec son plan (fig. 14) a pour valeur

$$\sin c = \frac{h}{\varphi} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,d\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\,d\gamma}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}},$$

ou encore

$$\text{(79)} \qquad \operatorname{tang} c = \frac{h}{k},$$

en désignant par k le rayon de la caractéristique.

Ce dernier forme avec h un triangle rectangle dont l'hypo-

ténuse est le rayon sphérique φ, ce qui donne

$$k = \sqrt{\varphi^2 - h^2}. \tag{80}$$

On peut enfin exprimer la hauteur H du cône de révolution circonscrit à la sphère (et par suite à la sphérale) le long de cette caractéristique. Elle constitue une troisième proportionnelle à k et h,

$$H = \frac{k^2}{h}. \tag{81}$$

L'angle générateur de ce cône n'est autre que c.

111. Attachons-nous spécialement, comme dans les deux parties précédentes de ce mémoire, au cas d'une directrice plane comprise dans l'équateur

$$y = F(x). \tag{82}$$

Le rapport de similitude ne dépendra plus que d'une seule variable, sous la forme $\varphi(\alpha)$; puisque $\gamma = 0$, et que β peut être remplacé par $F(\alpha)$.

L'équation de la sphère mobile devient dans ces conditions

$$(x-\alpha)^2 + [y - F(\alpha)]^2 + z^2 - \varphi^2(\alpha) = 0, \tag{83}$$

et sa dérivée relative à α

$$(x-\alpha) + [y - F(\alpha)]\,F'(\alpha) - \varphi(\alpha)\,\varphi'(\alpha) = 0. \tag{84}$$

La recherche de l'équation de la sphérale se réduit à l'élimination du paramètre α entre ces deux relations.

La distance du centre de la sphère au plan de la caractéristique devient alors

$$h = \frac{\varphi\varphi'}{\sqrt{1 + F'^2}}, \tag{85}$$

et les quantités c, k, H s'en déduisent par les formules (79), (80), (81).

112. Les sphérales de cette catégorie présentant une série de sections circulaires perpendiculaires au plan de l'équateur,

peuvent être considérées comme des surfaces à front générateur.

Nous soulignerons avec insistance cette remarque, puisqu'elle suffit à elle seule pour étendre à ce nouvel objet de nos études tous les résultats de la seconde partie, relatifs à la recherche du volume, du centre de gravité, du moment d'inertie. Pour toutes ces surfaces, la génératrice restant un cercle, les constantes de divers ordres μ ou λ garderont toujours les valeurs qui ont été indiquées pour ce cas (N.° 86, note 1).

Toutefois pour pouvoir appliquer effectivement cette assimilation, il est nécessaire que nous possédions l'équation de la nouvelle directrice, ainsi que les deux lois de l'inclinaison frontale et de la similitude.

Or l'équation (82) de la directrice devient en coordonnées polaires

$$r \sin \theta = F(r \cos \theta).$$

Admettons que l'on puisse la résoudre sous la forme que nous employons d'ordinaire

$$r = F_1(\theta).$$

La distance h du point décrivant M au plan de la caractéristique devient alors (85), en rendant à α sa valeur $r \cos \theta$

$$h = \frac{\varphi[F_1(\theta)\cos\theta] \cdot \varphi'[F_1(\theta)\cos\theta]}{\sqrt{1 + F'^2[F_1(\theta)\cos\theta]}}.$$

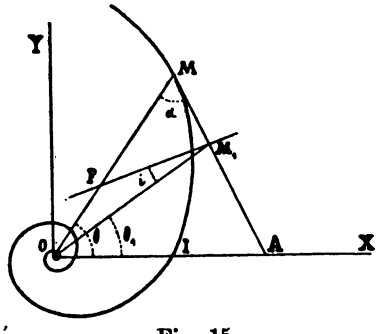

Fig. 15

Représentons la en abrégé par

$$h = F_2(\theta).$$

Le triangle OMM_1 (fig. 15) donne en premier lieu

$$r_1^2 = r^2 + h^2 - 2rh \cos a,$$

l'angle a étant fourni par les formules

$$\operatorname{tang} a = \frac{F_1}{F'_1}, \quad \sin a = \frac{F_1}{\sqrt{F_1^2 + F'^2_1}}, \quad \cos a = \frac{F'_1}{\sqrt{F_1^2 + F'^2_1}}.$$

Il vient donc

$$(86) \qquad r_1^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \frac{F'_1}{\sqrt{F_1^2 + F'^2_1}}.$$

Nous aurons d'autre part

$$\frac{\sin(\theta - \theta_1)}{h} = \frac{\sin a}{r_1},$$

c'est-à-dire

$$(87) \qquad \sin(\theta - \theta_1) = \frac{F_2}{r_1} \cdot \frac{F_1}{\sqrt{F_1^2 + F'^2_1}}.$$

En éliminant θ entre ces deux relations, on obtiendra en r_1, θ_1 l'équation de la nouvelle directrice.

Quant à l'inclinaison frontale, elle a pour valeur

$$(88) \qquad i = OM_1F = \frac{\pi}{2} - OM_1A = \frac{\pi}{2} - (OMA + MOM_1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - a - (\theta - \theta_1).$$

En y remettant la valeur de θ en fonction de θ_1 procurée par l'élimination précédente, on obtiendra sous la forme

$$i = \psi(\theta_1),$$

la loi de cette inclinaison.

Enfin celle de la similitude deviendra

$$\varphi(\alpha) = \varphi[F_1(\theta)\cos\theta],$$

dans laquelle on aura substitué cette même valeur de θ.

113. Toutes les sphérales jouissent de cette importante propriété que leur directrice (plane ou gauche) est rencontrée par chacune de leurs normales. En effet celles-ci sont également des normales pour chacune des sphères enveloppées, qui ont leurs centres alignés sur la directrice. Cette dernière se trouve en quelque sorte *hérissée* de l'ensemble de ces normales, qui rayonnent de chacun de ses points en forme de cône de révolution, d'angle générateur variable $\frac{\pi}{2} - c$.

114. Nous pouvons tirer parti de cette propriété pour résoudre la question suivante.

Etant donnée une directrice F (82) dans le plan de l'équateur, déterminer pour chacun de ses points une loi φ du rayon sphérique telle que la sphérale qui en résultera soit circonscrite à une surface

$$\psi(x, y, z) = 0, \tag{89}$$

assignée à priori.

La normale à cette dernière en un de ses points (x, y, z), que nous prenons par la pensée sur la ligne de contact inconnue, a pour équations

$$\frac{X - x}{\psi'_x} = \frac{Y - y}{\psi'_y} = \frac{Z - z}{\psi'_z}.$$

D'après la remarque précédente (N° 113), elle rencontrera la directrice, puisqu'elle est également une normale de la sphérale; et ce ne pourra être que par sa trace sur le plan de l'équateur $(Z = 0)$, dans lequel est située cette courbe. On aura donc, entre les coordonnées de cette trace

$$\alpha = x - \frac{\psi'_x}{\psi'_z}, \qquad \beta = y - z\frac{\psi'_y}{\psi'_z}, \tag{90}$$

la relation

$$\beta = F(\alpha), \tag{91}$$

c'est-à-dire

$$y - z\frac{\psi'_y}{\psi'_z} = F\left(x - z\frac{\psi'_x}{\psi'_z}\right). \tag{92}$$

La ligne de contact sera dès lors représentée par les deux équations (89), (92).

Quant à la sphère qui admet pour son propre compte cette normale au point (x, y, z), elle doit avoir son centre en (α, β), et un rayon φ encore inconnu. Son équation est donc

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \varphi^2.$$

Mais puisque le point (x, y, z) se trouve sur la ligne de contact, les trois relations (89), (90) permettent de déterminer ses coor-

données en fonction de α. Si donc on reporte ces trois valeurs dans cette expression de φ^2, on possèdera ainsi la loi cherchée $\varphi(\alpha)$. A partir de ce moment, on rentrera dans les conditions ordinaires pour la recherche de l'équation de la sphérale.

§ XVIII

Sphèrales réciproques

115. Appelons sphérales *vectorielles* celles pour lesquelles le rayon φ de la sphère variable reste en chaque point de la directrice D (plane ou gauche) proportionnel au rayon vecteur OM de cette courbe, que nous continnerons à représenter par r, mais en lui attribuant la valeur la plus générale, celle *de l'espace*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Le rayon sphérique sera donc Br, ou $r \sin b$, si nous conservons nos anciennes notations. La lettre ρ restera affectée à représenter les rayons vecteurs ON des divers points de la sphérale elle-même.

Transformons tout l'ensemble de la figure par rayons vecteurs réciproques

$$\rho\rho' = k^2.$$

La directrice D se change en une courbe D′ située sur le même cône de sommet O, et rencontraut la précédente en un ou plusieurs points K, de rayon vecteur OK $= k$.

Chacune des sphéres se transforme en une autre sphère. Á l'intersection de deux d'entre elles infiniment voisines correspondra celle des deux nouvelles. En un mot chaque caractéristique se change en une nouvelle caractéristique circulaire, et l'ancienne enveloppe devient une autre sphérale. Déterminons en la directrice et la loi de similitude.

Les points le plus rapproché et le plus éloigné du pôle sur chaque sphère (fig. 16) ont pour rayons vecteurs

$$\mathrm{OP} = r - \mathrm{B}r = (1 - \mathrm{B})\, r,$$

$$\mathrm{OQ} = r + \mathrm{B}r = (1 + \mathrm{B})\, r.$$

Ils deviennent inversement sur la nouvelle sphère le plus éloigné

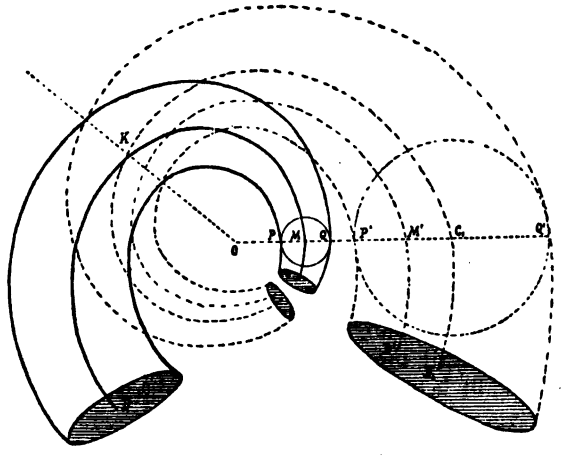

Fig. 16

et le plus rapproché du pôle

$$OP' = \frac{k^2}{(1-B)r}, \qquad OQ' = \frac{k^2}{(1+B)r}.$$

Mais le centre de celle-ci ne se trouve nullement au point M' réciproque de M. Il occupe le milieu C_1 de la distance P'Q'

$$r_1 = OC_1 = \frac{OP' + OQ'}{2} = \frac{k^2}{2r}\cdot\left(\frac{1}{1-B} + \frac{1}{1+B}\right) = \frac{k^2}{(1-B^2)r},$$

ou si l'on veut

$$r_1 = \frac{r'}{1-B^2},$$

en fonction du rayon r' du point réciproque M'. La nouvelle directrice D_1, lieu géométrique des points C_1, est donc une courbe homothétique de la transformée D' de la directrice proposée D, d'après le rapport de similitude [1]

$$\frac{1}{1-B^2} = \text{séc}^2\, b.$$

[1] Il importe de remarquer que cette circonstance exclut de la théorie

Quant au nouveau rayon sphérique, il a pour valeur

$$C_1Q' = OC_1 - OQ' = \frac{k^2}{(1-B^2)r} - \frac{k^2}{(1+B)r}$$

$$= \frac{k^2}{(1+B)r}\left(\frac{1}{1-B} - 1\right) = \frac{Bk^2}{(1-B^2)r} = Br_1.$$

La nouvelle sphérale est donc elle-même vectorielle, et du même indice B que la proposée. Nous pouvons dès lors énoncer ce théorème fondamental.

La transformée par rayons vecteurs réciproques d'une sphérale vectorielle quelconque d'indice sin b *est une autre sphérale vectorielle de même indice, ayant pour directrice une courbe homothétique, dans le rapport* séc^2 b, *de la transformée de la directrice proposée.*

116. Considérons comme exemple la surface qui concentrera plus loin notre attention (§ XXIII) sous le nom de *sphero-nautile*, et qui a pour directrice D la spirale logarithmique

$$r = e^{A\theta}.$$

La transformée D' de cette courbe sera

$$r' = \frac{k^2}{r} = k^2 e^{-A\theta},$$

et la nouvelle directrice D_1

$$r_1 = \frac{r'}{\cos^2 b} = \left(\frac{k}{\cos b}\right)^2 e^{-A\theta},$$

ce qui peut s'écrire

$$r_1 = e^{A\left[-\theta + 2\,\mathrm{tang}\,a\,\mathrm{Log}\left(\frac{k}{\cos b}\right)\right]}.$$

La surface réciproque du sphéro-nautile est donc un sphéro-nau-

---

actuelle les sphérales spéciales que nous appellerons *équiradiales*, pour lesquelles le rayon sphérique reste constamment égal au rayon vecteur

$$B = 1.$$

tile identique, mais renversé autour du rayon vecteur de valeur $\frac{k}{\cos b}$, de manière à tournoyer dans le sens dextrorsum si le proposé était sinistrorsum, ou réciproquement.

Sur les divers cônes de latitude, chaque cônhélice a pour transformée une cônhélice du nouveau sphéro-nautile.

117. Considérons de même la sphérale vectorielle qui a pour directrice la spirale sinusoïde d'ordre quelconque n (N° 137)

$$r = \cos^{\frac{1}{n}} n\theta .$$

La nouvelle directrice sera

$$r_1 = \frac{k^2}{r \cos^2 b} = \left(\frac{k}{\cos b}\right)^2 \cos^{-\frac{1}{n}}(-n\theta),$$

c'est-à-dire une spirale sinusoïde d'ordre égal et de signe contraire.

La transformée par rayons vecteurs réciproques de la proposée sera donc une sphérale appartenant à la même catégorie et de même indice vectoriel. mais d'ordre égal et de signe contraire, et amplifiée homothétiquement dans le rapport $\text{séc}^2 b$.

118. On obtient un énoncé identique avec les *spirales algébriques* (N° 138), qui ont pour équation

$$r = \theta^n .$$

§ XIX

Directrice en coordonnées sphériques

119. Le théorème fondamental qui précède (N° 115) permet d'associer deux par deux les sphérales vectorielles pour la recherche des leurs équations, en choisissant à cet effet la plus simple. Cette remarque devient particulièrement utile en ce qui concerne les directrices planes pour lesquelles on adopterait un pôle vectoriel *situé en dehors de leur plan*, à une distance h.

Ce plan aura en effet pour transformée par rayons vecteurs réciproques de module k une sphére passant par le pôle, sur laquelle les rayons vecteurs de la directrice plane D dessinent

sa transformée sphérique D'. La trajectoire D_1 du centre des nouvelles sphères variables, qui doit lui être semblable, sera elle-même tracée sur une seconde sphère fixe (d'après le module d'homothétie $\sec^2 b$) laquelle est représentée par la fig. 17.

Indiquons en conséquence la marche à suivre pour former l'équation de la sphérale vectorielle d'une courbe sphérique D_1, dont on possède, entre la longitude $\theta = AON$ de son point décrivant M, et sa *colatitude* $\mu = QOM$, l'équation

$$\theta = F(\mu).$$

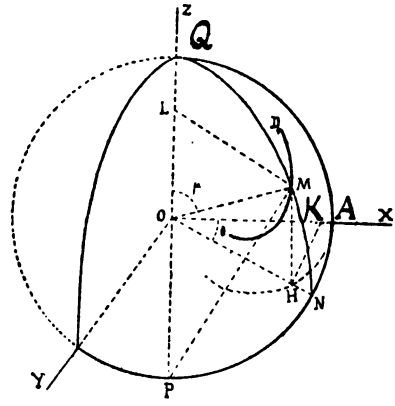

Fig. 17

Les coordonnées x, y, z du centre M de la sphère variable (si l'on prend pour unité le rayon de la sphère de référence), ont pour valeurs

$$x = OK = OH \cos\theta = \sin\mu \cos\theta,$$
$$y = HK = OH \sin\theta = \sin\mu \sin\theta,$$
$$z = MH = \cos\mu.$$

Le rayon vecteur PM sera, dans le triangle rectangle PMQ

$$r = PM = PQ \cos QPM = 2 \cos\frac{\mu}{2}.$$

Le rayon de la sphère variable est donc $2B \cos\frac{\mu}{2}$, et son équation, entre les coordonnées courantes X, Y, Z,

$$(X - \sin\mu\cos\theta)^2 + (Y - \sin\mu\sin\theta)^2 + (Z - \cos\mu)^2 = 4B^2\cos^2\frac{\mu}{2},$$

on en développant

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\sin\mu(X\cos\theta + Y\sin\theta) - 2Z\cos\mu$$
$$+ 1 - 4B^2\cos^2\frac{\mu}{2} = 0,$$

c'est-à-dire en coordonnées mixtes R, ω, λ

$$\frac{R^2}{\cos^2\lambda} - 2R\left[\sin\mu\cos(\theta-\omega) + \cos\mu\,\mathrm{tang}\,\lambda\right]$$
$$-2B^2\cos\mu + (1-2B^2) = 0\,,$$

et enfin, d'après l'équation de la directrice

$$(93)\quad \left(\frac{R}{\cos\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{\cos\lambda}\right)\left[\sin\lambda\cos\mu + \cos\lambda\sin\mu\cos(F-\omega)\right]$$
$$-2B^2\cos\mu + (1-2B^2) = 0\,.$$

Telle est l'équation de la sphère variable en fonction du paramètre μ.

Prenous en la dérivée par rapport à ce dernier

$$\frac{B^2\sin\mu\cos\lambda}{R} + \sin\lambda\sin\mu - \cos\lambda\cos\mu\cos(F-\omega)$$
$$+\cos\lambda\sin\mu\sin(F-\omega)\,F' = 0\,,$$

on en divisant par $\sin\mu\cos\lambda$

$$\frac{B^2}{R} + \mathrm{tang}\,\lambda - \cot\mu\cos(F-\omega) + F'\sin(F-\omega) = 0\,,$$

et enfin

$$(94)\qquad F'\sin(F-\omega) = \cot\mu\cos(F-\omega) - M\,,$$

si l'on pose pour abréger

$$M = \mathrm{tang}\,\lambda + \frac{B^2}{R}.$$

Or la relation (93) donne, en la divisant par $\frac{2R}{\cos\lambda}$

$$\cos\lambda\sin\mu\cos(F-\omega) + \sin\lambda\cos\mu$$
$$= \frac{R}{2\cos\lambda} - \frac{\cos\lambda}{2R}(2B^2\cos\mu + 2B^2 - 1)\,.$$

c'est-à-dire

$$\sin\mu\cos(F-\omega) = -\operatorname{tang}\lambda\cos\mu + \frac{R^2}{2\cos^2\lambda} - \frac{B^2}{R}\cos\mu + \frac{1-2B^2}{2R}$$

$$= -\left(\operatorname{tang}\lambda + \frac{B^2}{R}\right)\cos\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\cos^2\lambda} + \frac{1-2B^2}{R}\right).$$

Si enfin nous introduisons la nouvelle abréviation

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{\cos^2\lambda} + \frac{1-2B^2}{R}\right),$$

on pourra écrire

(95) $$\sin\mu\cos(F-\omega) = N - M\cos\mu.$$

Substituons cette valeur de $\cos(F-\omega)$ dans l'égalité (94), il viendra

(96) $$F'\sin^2\mu\sin(F-\omega) = N\cos\mu - M.$$

Actuellement multiplions les deux membres de la relation (95) par $F'\sin\mu$, élevons les au carré, ainsi que ceux de (96), et ajoutons. Nous faisons ainsi disparaitre ω, et il reste

(97) $$F'^2\sin^4\mu = F'^2\sin^2\mu\,(N - M\cos\mu)^2 + (N\cos\mu - M)^2.$$

Cette résolvante renferme μ sous les signes trigonométriques et dans la fonction F', sans que F y paraisse par lui-même. Quant aux symboles M, N, ils sont uniquement fonctions de R et λ. Il ne restera plus qu'à tirer dans chaque cas de cette égalité l'expression de μ, pour la substituer dans la précédente (96), ce qui fournira en R, ω, λ l'équation de la sphérale.

120. Appliquons cette méthode à la recherche de la sphérale vectorielle qui a pour diroctrice une *loxodromie*.

Le triangle infinitésimal formé par les trois arcs élémentaires de cette ligne, du méridien et du parallèle donne pour l'angle *constant* a que fait la courbe avec le méridien

$$\cot a = \frac{d\mu}{\sin\mu\, d\theta},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\theta}{d\mu} = F'(\mu) = \frac{\tang a}{\sin \mu}.$$

La relation (97) devient dès lors

$$\tang^2 a\,[\sin^2 \mu - (N - M \cos \mu)^2] = (N \cos \mu - M)^2,$$

ou en développant

$$[(M^2 + 1) \sin^2 a + N^2 \cos^2 a] \cos^2 \mu + 2MN \cos \mu$$
$$- [(N^2 - 1) \sin^2 a + M^2 \cos^2 a] = 0,$$

équation du second degré en $\cos \mu$, qui permettra d'achever la solution.

121. La transformée D′ de la loxodromie D est une spirale logarithmique du même angle a, et la courbe D_1 semblable à celle-ci une spirale identique, mais déviée. Toutefois il ne s'ensuit pas pour cela que la sphérale correspondante soit un sphéro-nautile. En effet le rayon des sphères variables devrait pour cela prendre comme valeur $Be^{A\theta}$, tandis qu'elle est $B\sqrt{h^2 + e^{2A\theta}}$. Il s'agit donc ici d'une surface plus générale, d'après l'arbitraire h, admettant comme limite le sphéro-nautile, lorsque ce paramètre tend vers zéro.

§ XX

Directrice en coordonnées rectangulaires

122. Revenons maintenant à la directrice (82), rapportée, dans son propre plan, à des coordonnées rectangulaires. Nous avons vu qu'il suffit, pour obtenir l'équation de sa sphérale dans les conditions les plus générales, d'éliminer α entre les deux relations (83), (84).

Pour en montrer un exemple, prenons comme directrice un cercle de rayon égal à l'unité, avec un rayon sphérique By proportionnel à l'ordonnée de cette circonférence. Si θ désigne l'azimut du centre de la sphère variable, elle aura pour équation

$$(x - \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2 + z^2 = B^2 \sin^2 \theta,$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x \cos \theta + y \sin \theta) + \cos^2 \theta + (1 - B^2) \sin^2 \theta = 0,$$

ou, en coordonnées mixtes,

$$\frac{R^2}{\cos^2\lambda} - 2R\cos(\theta-\omega) + 1 - B^2\sin^2\theta = 0.$$

Cette relation donne comme dérivée relative à θ

$$R\sin(\theta-\omega) = B^2\sin\theta\cos\theta.$$

On tire de là

$$\sin(\theta-\omega) = \frac{B^2}{R}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\cos(\theta-\omega) = \frac{R}{2\cos^2\lambda} + \frac{1-B^2\sin^2\theta}{2R},$$

et en ajoutant les carrés

$$1 = \frac{B^4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}{R^2} + \left(\frac{R}{2\cos^2\lambda} + \frac{1-B^2\sin^2\theta}{2R}\right)^2,$$

équation bicarrée en $\sin\theta$. Il n'y aura plus qu'à substituer la valeur qu'elle fournit dans l'équation dérivée, pour obtenir celle de la sphérale.

123. La méthode générale se simplifie pour les sphérales *équilatères*, dans lesquelles le rayon de la sphère mobile reste constamment égal à l'ordonnée de la directrice.

Si en effet on remplace φ par F dans l'équation (83), elle se réduit à

$$F(\alpha) = \frac{(\alpha-x)^2 + y^2 + z^2}{2y}, \tag{98}$$

d'où la dérivée

$$F'(\alpha) = \frac{\alpha - x}{y}, \tag{99}$$

avec élimination de α entre ces deux formules.

124. Si nous y faisons à la fois $y=0$, $z=0$, l'une quelconque des deux donne $x=\alpha$, et l'autre se trouve identiquement satisfaite par cette substitution. Il en faut conclure que

la droite représentée par ces deux équations, c'est-à-dire l'axe des abscisses, fait toujours partie de la surface. Ce résultat, d'ailleurs évident à l'avance, nous permet de signaler une conséquence utile.

Le pied P de toute ordonnée (fig. 18) fait d'après cela partie de la caractèristique. Or nous savons d'une manière générale (N° 109) que la trace du plan de cette courbe est une perpendiculaire sur la tangente en M à la directrice. Abaissons donc cette perpendiculaire PP'. Mais cette tangente contient aussi le sommet M_2 du cône de révolution circonscrit suivant la caractéristique. Or PO tangente au grand cercle de la sphére mobile est une des génératrices de ce cône. Le sommet M_2 se trouve ainsi déterminé par l'intersection de ces deux droites. Dès lors la sphérale se présente sous un nouvel aspect distinct du précédent, comme l'enveloppe des cônes de révolution engendrés par la rotation de l'axe des abscisses autour de toutes les tangentes de la directrice successivement.

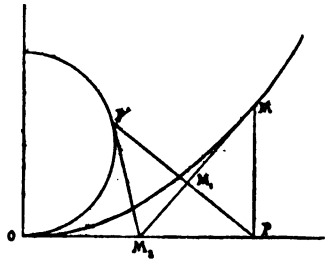

Fig. 18

125. Prenons comme exemple la *logarithmique*

$$y = e^{mx}.$$

Les formules (98), (99) deviennent

$$e^{m\alpha} = \frac{(\alpha - x)^2 + y^2 + z^2}{2y},$$

$$e^{m\alpha} = \frac{\alpha - x}{my},$$

d'où il suit:

$$(\alpha - x)^2 - \frac{2}{m}(\alpha - x) + y^2 + z^2 = 0,$$

$$\alpha - x = \frac{1}{m} \pm \sqrt{\frac{1}{m^2} - y^2 - z^2},$$

et pour l'équation de la sphérale

$$y^2+z^2+\left(\frac{1}{m}\pm\sqrt{\frac{1}{m^2}-y^2-z^2}\right)^2=2ye^{mx\pm\sqrt{1-m^2(y^2+z^2)}}.$$

L'équation

$$y=n\,\mathrm{Log}\,x,$$

représente au fond la même courbe; mais, résolue sous cette forme, elle donne naissance à une sphérale toute différente. Les rayons sphériques, égaux aux nouvelles ordonnées, le sont dès lors aux anciennes abscisses et non plus, comme tout à l'heure, aux anciennes ordonnées.

Les formules générales (98), (99) donnent alors

$$n\,\mathrm{Log}\,\alpha=\frac{(\alpha-x)^2+y^2+z^2}{2y},$$

$$\frac{n}{\alpha}=\frac{\alpha-x}{y}.$$

cette dernière peut s'écrire:

$$(\alpha-x)^2+x(\alpha-x)-ny=0.$$

Elle nous fournit $\alpha-x$ qu'il suffit de reporter dans la précédente; d'où l'équation de la nouvelle sphérale

$$z^2=2ny\,\mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{x^2+ny}+x}{2}\right)-y^2-\left(\frac{\sqrt{x^2+ny}-x}{2}\right)^2.$$

126. Considérons encore comme directrice la chainette

$$y=\frac{e^{mx}+e^{-mx}}{2}.$$

Nous aurons (98, 99)

$$(100)\qquad e^{m\alpha}+e^{-m\alpha}=\frac{(\alpha-x)^2+y^2+z^2}{y},$$

$$e^{m\alpha}-e^{-m\alpha}=\frac{2}{my}(\alpha-x),$$

d'où, en ajoutant et retranchant alternativement

$$2ye^{m\alpha} = y^2 + z^2 + (\alpha - x)^2 + \frac{2}{m}(\alpha - x),$$

$$2ye^{-m\alpha} = y^2 + z^2 + (\alpha - x)^2 - \frac{2}{m}(\alpha - x),$$

et en multipliant membre à membre

$$4y^2 = [y^2 + z^2 + (\alpha - x)^2]^2 - \frac{4}{m^2}(\alpha - x)^2.$$

De là une équation bicarrée en $\alpha - x$, dont on substituera les racines dans la formule (100).

La sinusoïde

$$y = \cos nx,$$

conduit également à une équation bicarrée; et cela devait être en effet, puisque les deux équations rentrent l'une dans l'autre si l'on prend

$$m = n\sqrt{-1}.$$

127. Envisageons enfin comme directrice la parabole d'ordre positif quelconque n, entier, fractionnaire ou incommensurable

$$y = x^n, \qquad F = \alpha^n, \qquad F' = n\alpha^{n-1},$$

ce qui donne pour les équations générales (98), (99)

$$(101) \qquad 2y\alpha^n = (\alpha - x)^2 + y^2 + z^2,$$

$$(102) \qquad ny\alpha^{n-1} = \alpha - x.$$

Multiplions la première par n, la seconde par 2α, et retranchons. Le terme α^n disparait, et il reste

$$n(\alpha - x)^2 - 2(\alpha - x) + n(y^2 + z^2) = 0,$$

ou, sous une autre forme

$$(103) \qquad (n-2)(\alpha - x)^2 - 2x(\alpha - x) + n(y^2 + z^2) = 0,$$

équation du second degré en $\alpha - x$ qui donne

$$(104) \qquad (n-2)(\alpha - x) = x \pm \sqrt{x^2 - n(n-2)(y^2+z^2)},$$

En substituant dans l'égalité (102), on obtient l'équation de la sphérale.

128. Il se présente cependant une exception pour le cas, précisément le plus simple de tous, celui de la parabole du second degré ($n=2$). La formule (104) ne peut plus alors fournir α; mais si l'on se reporte à (103), il vient directement

$$\frac{y^2+z^2}{x} = \alpha - x = 2y\alpha.$$

Tirant de là α et $\alpha - x$ pour les substituer dans (101), on obtient

$$2y\left(\frac{y^2+z^2}{2xy}\right)^2 = \left(\frac{y^2+z^2}{x}\right)^2 + (y^2+z^2),$$

d'où, en multipliant par $\dfrac{2x^2y}{y^2+z^2}$

$$(105) \qquad (y^2+z^2)(1-2y) = 2x^2y,$$

sphérale du troisième degré.

Sa trace sur le plan $z=0$ de la directrice a pour équation

$$y(1-2y-2x^2) = 0,$$

qui représente d'une part l'axe des abscisses $y=0$, comme nous le savons d'une manière générale (N° 128), et en second lieu le cercle

$$x^2+y^2-\frac{y}{2} = 0,$$

qui passe au sommet de la parabole, et a pour centre son foyer [1].

---

[1] C'est précisément pour cette surface qu'a été tracée la figure 18.

§ XXI

Directrice en coordonnées polaires

129. Supposons maintenant que la directrice soit représentée par l'équation

$$r = F(\theta).$$

La sphère qui a pour rayon $\varphi(\theta)$ et son centre au point (r, θ) admet comme équation

$$(106) \qquad (x - r\cos\theta)^2 + (y - r\sin\theta) + z^2 = \varphi^2,$$

$$(107) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2F(x\cos\theta + y\sin\theta) + F^2 - \varphi^2 = 0,$$

$$(108) \qquad \frac{R^2}{\cos^2\lambda} - 2FR\cos(\theta - \omega) + F^2 - \varphi^2 = 0.$$

La dérivée relative à θ devient

$$(109) \qquad FR\sin(\theta - \omega) - F'R\cos(\theta - \omega) + FF' - \varphi\varphi' = 0,$$

et l'équation de la sphérale s'obtient par l'élimination de θ entre (108) et (109).

130. Si l'on envisage en particulier une sphérale vectorielle

$$\varphi = Br = r\sin b,$$

ces équations fondamentales deviennent

$$(110) \qquad F^2\cos^2 b - 2FR\cos(\theta - \omega) + \frac{R^2}{\cos^2\lambda} = 0,$$

$$(111) \qquad FF'\cos^2 b - R[F'\cos(\theta - \omega) - F\sin(\theta - \omega)] = 0.$$

131. Mais revenons aux formules entièrement générales (108, 109), pour calculer les différents éléments de la caractéristique.

Nous savons que l'équation dérivée (109) représente la trace

du plan vertical de cette courbe. Rendons lui, en coordonnées rectangulaires, la forme

$$(F\sin\theta - F'\cos\theta)x - (F\cos\theta + F'\sin\theta)y + FF' - \varphi\varphi' = 0,$$

La distance h de ce plan au point décrivant $M(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ a pour valeur

$$h = \frac{(F\sin\theta - F'\cos\theta)F\cos\theta - (F\cos\theta + F'\sin\theta)F\sin\theta + FF' - \varphi\varphi'}{\sqrt{(F\sin\theta - F'\cos\theta)^2 + (F\cos\theta + F'\sin\theta)^2}},$$

ou en réduisant

$$(112) \qquad h = \frac{\varphi\varphi'}{\sqrt{F^2 + F'^2}}.$$

Nous en déduisons (80) le rayon de la caractéristique

$$(113) \qquad k^2 = \varphi^2 - h^2 = \varphi^2\left(1 - \frac{\varphi'^2}{F^2 + F'^2}\right),$$

l'angle générateur (79) du cône circonscrit

$$(114) \qquad \sin c = \frac{h}{\varphi} = \frac{\varphi'}{\sqrt{F^2 + F'^2}},$$

la hauteur (81) de ce cône

$$(115) \qquad H = \frac{k^2}{h} = \frac{\varphi}{\varphi'}\left(\frac{F^2 + F'^2 - \varphi'^2}{\sqrt{F^2 + F'^2}}\right),$$

enfin la distance $MM_2 = H + h$ du point décrivant M au sommet du cône circonscrit:

$$(116) \qquad H + h = \frac{k^2}{h} + h = \frac{\varphi^2}{h} = \frac{\varphi}{\varphi'}\sqrt{F^2 + F'^2} = \frac{\varphi}{\varphi'}\frac{r}{\sin a}.$$

132. Appliquons spécialement ces formules au cas des sphé-

rales vectorielles

$$\varphi = F \sin b,$$

(117) $$h = \frac{FF' \sin^2 b}{\sqrt{F^2 + F'^2}},$$

(118) $$k = F \sin b \sqrt{\frac{F^2 + F'^2 \cos^2 b}{F^2 + F'^2}},$$

(119) $$\sin c = \frac{F' \sin b}{\sqrt{F^2 + F'^2}},$$

(120) $$H = \frac{F}{F'}\left(\frac{F^2 + F'^2 \cos^2 b}{\sqrt{F^2 + F'^2}}\right),$$

(121) $$H + h = \frac{F}{F'}\sqrt{F^2 + F'^2} = \frac{r}{\cos a}.$$

Cette dernière valeur est indépendante du coefficient vectoriel b. Elle montre que le sommet M_2 du cône circonscrit se trouve à l'intersection de la tangente MM_2 de la directrice avec la perpendiculaire OM_2 élevée au pôle sur le rayon vecteur OM.

Lorsqu'il s'agit spécialement du sphéro-nautile, dont la directrice est une spirale logarithmique, on sait que telle est la construction qui fait connaitre, en MM_2, la longueur de l'arc de cette courbe à partir de son pôle asymptotique.

133. Supposons comme exemple une directrice rectiligne perpendiculaire à l'axe polaire

$$r \cos \theta = 1, \qquad F = \frac{1}{\cos \theta}.$$

La relation (107) devient

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y \operatorname{tang} \theta + \cos^2 b (1 + \operatorname{tang}^2 \theta) = 0.$$

On y peut considérer $\operatorname{tang} \theta$ comme le paramètre par rapport auquel doit être prise la dérivée, ce qui donne

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{y}{\cos^2 b},$$

d'où, en substituant

$$x^2+y^2+z^2-2x-\frac{y^2}{\cos^2 b}+\cos^2 b=0,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{(x-1)^2+z^2}{\sin^2 b}-\frac{y^2}{\cos^2 b}=1.$$

On y reconnait l'équation de la surface gauche de révolution autour de la directrice. Son hyperbole méridienne

$$\frac{(x-1)^2}{\sin^2 b}-\frac{y^2}{\cos^2 b}=1,$$

a pour demi-axes $\sin b$, $\cos b$, et pour foyer l'origine.

Si l'on veut envisager comme second exemple un cercle rapporté à l'un de ses points, il ne sera plus nécessaire de reprendre à cet effet aucun calcul. Cette courbe est en effet la transformée par rayons vecteurs réciproques de sa tangente au point diamétralement opposé au pôle. Dès lors la nouvelle sphérale sera, d'après le théorème fondamental du N° 116, la transformée par rayons vecteurs réciproques du précédent hyperboloïde de révolution à une nappe relativement à un des points de son cercle focal, à savoir

$$R=\cos\lambda\,(\cos\lambda\cos\omega\pm\sqrt{\cos^2\lambda-\cos^2 b}).$$

134. La méthode générale se simplifie lorsqu'il s'agit des sphérales *équiradiales*, pour lesquelles le rayon sphérique reste constamment égal au rayon vecteur: $\varphi=r$. Il vient alors, en supposant $\cos b=0$ dans les relations (110), (111)

$$(122)\quad F=\frac{R}{2\cos(\theta-\omega)\cos^2\lambda},\qquad F'=\frac{R\sin(\theta-\omega)}{2\cos^2(\theta-\omega)\cos^2\lambda},$$

ce que l'on peut mettre sous la forme

$$(123)\quad \cos(\theta-\omega)=\frac{R}{2F\cos^2\lambda},\qquad \sin(\theta-\omega)=\frac{F'R}{2F^2\cos^2\lambda},$$

Nous aurons également en divisant membre à membre, et en

formant la somme des carrés

$$(124) \qquad \frac{2\cos^2\lambda}{R} = \frac{\sqrt{F^2+F'^2}}{F^2},$$

$$(125) \qquad \operatorname{tang}(\theta-\omega) = \frac{F'}{F} = \cot a.$$

d'où l'on déduit encore ces formules qui nous seront utiles plus loin

$$(126) \qquad \omega = \theta + \operatorname{arctang}\frac{F}{F'} - \frac{\pi}{2} = \theta - \operatorname{arctang}\frac{F'}{F},$$

$$d\omega = \left(1 + \frac{F'^2 - FF''}{F^2+F'^2}\right)d\theta = \frac{F^2+2F'^2-FF''}{F^2+F'^2}\,d\theta.$$

135. Les équations (122) peuvent s'écrire:

$$\frac{R}{\cos^2\lambda} = 2F(\theta)\cos(\theta-\omega) = \frac{2F'(\theta)\cos^2(\theta-\omega)}{\sin(\theta-\omega)}.$$

Si l'on imagine que l'on ait substitué dans l'une ou l'autre la valeur de θ déduite de (125), on obtiendra $\frac{R}{\cos^2\lambda}$ en fonction de ω. La section opérée par un plan méridien quelconque $\omega = \text{const.}$ sera donc toujours une courbe représentée par l'équation

$$\frac{R}{\cos^2\lambda} = \text{const.},$$

ou, entre les coordonnées polaires (ρ, λ)

$$\frac{\rho}{\cos\lambda} = \text{const.},$$

c'est-à-dire un cercle passant par le pôle.

Et en effet ce point appartenant à toutes les sphères, fait nécessairement partie de la sphérale et de toutes les caractéristiques. On obtient donc leurs divers plans en menant par le pôle des plans normaux aux tangentes de la directrice (plane ou gauche). Lorsque celle-ci se trouve comprise dans un plan, ce sont précisément les sections circulaires méridiennes que le calcul vient de mettre en évidence.

On reconnait dès lors qu'une sphérale équiradiale est engendrée par un cercle variable qui passe incessamment par le pôle, tandis que son centre parcourt la podaire de la directrice (plane ou gauche) relative à ce point.

Revenant au cas où celle-ci est comprise dans le plan de l'équateur, nous voyons que la trace équatoriale de la sphérale équiradiale est une courbe homothétique de cette podaire, obtenue en doublant tous ses rayons vecteurs. En effet OM_1 (fig. 19) étant la trace du plan de la caractéristique, le point M'_1 situé sur le grand cercle de la sphère variable, appartient à la sphérale, ainsi qu'à sa trace équatoriale.

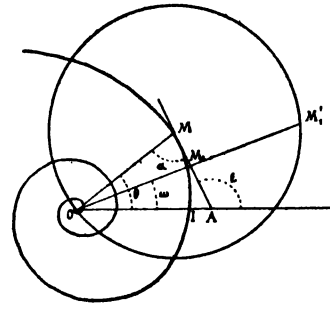

Fig. 19

C'est d'ailleurs ce qu'exprime, dans le cas actuel, la formule (125), d'après le triangle OMM_1.

Constatons donc que les sphérales équiradiales pour une directrice (M) sont l'équivalent de nos anciennes équiradiales à front méridien générateur (N° 10), mais pour une directrice (M_1) toute différente, qui est la podaire de la première.

136. Prenous comme exemple de directrice la spirale sinusoïde d'ordre tout à fait quelconque n

$$r^n = \cos n\theta\,,$$

$$F = \cos^{\frac{1}{n}} n\theta\,, \qquad F' = -\cos^{\frac{1-n}{n}} n\theta \sin n\theta\,.$$

La relation (125) donne alors

$$\omega = \theta - \operatorname{arc\,cot}\left(-\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}\right) = (n+1)\,\theta\,,$$

$$\theta = \frac{\omega}{n+1}\,, \qquad \theta - \omega = \frac{n}{n+1}\,\omega\,,$$

et en reportant cette valeur dans (124)

$$\text{(127)} \qquad \frac{R}{2\cos^2\lambda} = \cos^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{n}{n+1}\,\omega\right),$$

équation de la sphérale équiradiale.

Elle a pour trace équatoriale

$$(128) \qquad \left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \cos\left(\frac{n}{n+1}\omega\right),$$

c'est-à-dire une autre spirale sinusoïde d'ordre $\frac{n}{n+1}$; résultat conforme au théorème précédent (N° 136), d'après ce que l'on sait de la podaire de ces courbes [1].

137. Nous pouvons également effectuer cette recherche pour les coniques rapportées à leur foyer

$$r = \frac{b^2}{a(1 + e\cos\theta)}.$$

On obtient alors comme équation de la sphérale entre R, ω, λ

$$\omega = \text{arc}\cos m - \text{arc tang}\left(\frac{e\sqrt{1-m^2}}{1+em}\right),$$

en employant l'abréviation suivante

$$m = \frac{2b^4\cos^4\lambda}{ea^2R^2} - \frac{1+e^2}{2e}.$$

138. Envisageons encore comme exemple la spirale algébrique d'ordre quelconque n positif ou négatif, entier, fractionnaire ou incommensurable

$$r = \theta^n.$$

---

[1] On peut signaler les directrices suivantes, qui fournissent, comme traces équatoriales, d'autres spirales sinusoïdes également simples :

Cercle	$n = 1$,	$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$	cardioïde,
Parabole	$-\frac{1}{2}$,	-1	droite,
Hyperbole	-2,	$+2$	lemniscate.

La formule (124) devient

$$\frac{2\cos^2\lambda}{R} = \frac{\sqrt{\theta^{2n} + n^2\theta^{2n-2}}}{\theta^{2n}} = \frac{\sqrt{\theta^2 + n^2}}{\theta^{n+1}},$$

c'est-à-dire

$$(129) \qquad \frac{4\cos^4\lambda}{R^2}\theta^{2n+2} - \theta^2 - n^2 = 0.$$

La relation (125) donne de son coté

$$\omega = \theta + \operatorname{arc\,tang}\frac{\theta}{n} - \frac{\pi}{2}.$$

Elle est nettement insoluble par rapport à θ. Mais la précédente, qui est algébrique, pourra dans certains cas fournir, pour ce paramètre, une valeur qu'il suffira de substituer ici, de manière à obtenir définitivement l'équation de la sphérale.

Cette circonstance, si l'on se borne aux fonctions élémentaires [1], se présentera pour dix-sept directrices diverses, qui ramènent aux quatre premiers degrés la résolvante (129), envisagée par rapport à l'inconnue θ elle-même ou à certaines puissances auxiliaires de θ. On se trouve conduit au quatrième degré par les valeurs suivantes de l'exposant n

$$3, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{3}{4}, \quad -\frac{4}{3}, \quad -4;$$

---

[1] Si l'on fait $n = 4$, la résolvante (129) prend d'elle même par rapport à l'inconnue auxiliaire

$$\theta^2\cos\lambda\sqrt{\frac{2}{R}\sqrt{-1}},$$

la forme réduite de Bring et de Jerrard, qui a été employée par Hermite pour ramener aux fonctions elliptiques la résolution de l'équation du cinquième degré. On obtient de telles équations pour les douze valeurs suivantes de n

$$4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{2}, -5.$$

au troisième avec

$$2\,(^1),\quad \frac{1}{2}\,(^2),\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{2}{3},\quad -\frac{3}{2},\quad -3\,;$$

au second pour

$$1\,(^3),\quad -\frac{1}{2}\,(^4),\quad -2\,;$$

enfin au premier degré avec

$$0\,(^5),\quad -1\,.$$

Je me contenterai, parmi ces vingt-neuf problèmes, d'envisager le plus simple, qui est celui de la spirale hyperbolique

$$n=-1\,,\quad F=\frac{1}{\theta},\quad F'=-\frac{1}{\theta^2},\quad \frac{F}{F'}=-\theta\,.$$

La relation (125) devient alors

$$\omega=\theta+\operatorname{arc\,cot}\theta \tag{130}$$

Quant à la résolvante (124) elle donne

$$\frac{4\cos^4\lambda}{R^2}-\theta^2-1=0\,,$$

$$\theta=\sqrt{\frac{4\cos^4\lambda}{R^2}-1}\,, \tag{131}$$

ce qui fournit pour l'équation de la sphérale

$$\omega=\sqrt{\frac{4\cos^4\lambda}{R^2}-1}+\operatorname{arc\,cot}\sqrt{\frac{4\cos^4\lambda}{R^2}-1}\,. \tag{132}$$

---

(1) Conchoïde de la spirale de Galilée (Gomes Teixeira, *Tratado de las curvas especiales notables*, p. 367).
(2) Spirale de Fermat (*ibidem*, p. 371).
(3) Spirale d'Archimède.
(4) *Lituus* de Côtes (*ibidem*, p. 380).
(5) Cercle.

§ XXII

Sphèro-nautile

139. Arrivons enfin à l'application principale que nous avons en vue dans ce travail, c'est-à-dire à l'équation du *sphéro-nautile,* pour lequel la directrice est la spirale logarithmique; le module vectoriel b redevenant quelconque.

La formule (121) donne alors

$$Ae^{2A\theta}\cos^2 b + R\left[e^{A\theta}\sin(\theta-\omega) - Ae^{A\theta}\cos(\theta-\omega)\right] = 0,$$

(133) $$e^{A\theta}\cos a\cos^2 b = R\left[\cos(\theta-a)\cos a - \sin(\theta-a)\sin a\right].$$

(134) $$e^{A\theta} = R\frac{\cos(\theta-\omega+a)}{\cos a\cos^2 b}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans la relation (110), R disparait, et il reste

$$\frac{\cos^2(\theta-\omega+a)}{\cos^2 a\cos^2 b} - 2\frac{\cos(\theta-\omega+a)\cos(\theta-\omega)}{\cos a\cos b^2} + \frac{1}{\cos^2\lambda} = 0,$$

$$\cos(\theta-\omega+a)\left[\cos(\theta-\omega+a) - 2\cos(\theta-\omega)\cos a\right] + \frac{\cos^2 a\cos^2 b}{\cos^2\lambda} = 0.$$

$$\cos(\theta-\omega+a)\cos(\theta-\omega-a) = \frac{\cos^2 a\cos^2 b}{\cos^2\lambda},$$

$$\cos^2(\theta-\omega)\cos^2 a - \sin^2(\theta-\omega)\sin^2 a = \frac{\cos^2 a\cos^2 b}{\cos^2\lambda}.$$

On déduit de là successivement

(135) $$\sin(\theta-\omega) = \frac{\cos a}{\cos\lambda}\sqrt{\cos^2\lambda - \cos^2 b},$$

$$\cos(\theta-\omega) = \frac{\sqrt{\sin^2 a\cos^2\lambda + \cos^2 a\cos^2 b}}{\cos\lambda}.$$

Remettant ces valeurs dans (133), on obtient

$$(136)\qquad e^{\Lambda\theta} = \frac{R}{\cos^2 b \cos\lambda}\left(\sqrt{\sin^2 a \cos^2\lambda + \cos^2 a \cos^2 b} - \sin a \sqrt{\cos^2\lambda - \cos^2 b}\right).$$

on sous une forme équivalente

$$(137)\qquad \theta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log}\left[\frac{R}{\cos\lambda \cos^2 b}\left(\sqrt{\sin^2 a \cos^2\lambda + \cos^2 a \cos^2 b} - \sqrt{\sin^2 a \cos^2\lambda - \sin^2 a \cos^2 b}\right)\right].$$

Comme d'ailleurs la relation (135) nous donne en même temps

$$(138)\qquad \theta = \omega + \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\cos a}{\cos\lambda}\sqrt{\cos^2\lambda - \cos^2 b}\right),$$

si nous égalons l'une à l'autre ces deux valeurs de l'azimut θ, nous obtenons enfin l'équation du sphéro-nautile entre R, ω, λ, et les constantes a, b. Mais il est inutile d'effectuer cette transcription.

140. En faisant dans l'équation en question $\lambda = 0$, nous obtiendrons celle de la trace équatoriale

$$\omega + \operatorname{arc\,sin}(\cos a \sin b)$$
$$= \operatorname{tang} a \operatorname{Log}\left[\frac{R}{\cos^2 b}\left(\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^2 b} \pm \sin a \sin b\right)\right].$$

Elle est formée de deux spirales logarithmiques égales à la directrice, mais déviées. On ne doit en effet, parmi les quatre combinaisons que fournissent les doubles signes des deux radicaux, prendre que les deux valeurs positives, sous peine de rendre le logarithme imaginaire.

Remarquons d'ailleurs que la valeur (138) ne commence à être réelle que pour des latitudes inférieures à $\lambda = b$. Telle est donc l'équation de la cônhélice de contact entre le sphéro-nautile et le cône qui lui est circonscrit à partir du pôle.

141. Les expressions (136), (137), (138), équivalentes entre

elles. présentent une grande importance. Elles déterminent en effet, pour chaque point (R, ω, λ) de la surface, l'azimut θ du centre de la sphére qui l'y touche, ou encore (N° 113) le pied de sa normale. La première de ces formules fournit cet azimut en fonction de R, λ; la seconde en ω, λ.

La dernière (138) sera la plus utile. Si on la laisse sous sa précédente forme (135), elle exprime le sinus de l'appoint $\theta - \omega$ qu'il faut ajouter à la longitude ω de ce point N pour obtenir l'azimut correspondant θ du centre M; et rien ne s'oppose à ce qu'on le construise à l'aide de la règle et du compas.

142. Les formules générales (117 à 121) donnent pour le sphéro-nautile

$$(139) \qquad h = \frac{Ae^{A\theta}\sin^2 b}{\sqrt{1+A^2}} = r\cos a \sin^2 b\,,$$

$$(140) \qquad k = e^{A\theta}\sin b\sqrt{\frac{1+A^2\cos^2 b}{1+A^2}} = r\sin b\sqrt{1-\cos^2 a\sin^2 b}\,,$$

$$(141) \qquad H = e^{A\theta}\frac{1+A^2\cos^2 b}{A\sqrt{1+A^2}} = r\frac{1-\cos^2 a\sin^2 b}{\cos a}\,,$$

$$(142) \qquad H + h = \frac{r}{\cos a}\,.$$

L'angle a restant constant sur la spirale logarithmique, ces quatre éléments sont proportionnels au rayon vecteur.

Remarquons encore la valeur de l'angle c, que forment les rayons sphériques normaux avec le plan de la caractéristique, ou les génératrices du cône circonscrit avec la tangente à la directrice

$$(143) \qquad \sin c = \frac{h}{\varphi} = \frac{h}{r\sin b} = \sin b\cos a\,.$$

Cet angle demeure donc constant, et le sphéro-nautile se trouve ainsi défini au moyen de trois éléments angulaires a, b, c, dont deux seulement restent arbitraires, le troisième leur étant relié par cette condition (143). Il convient pourtant de remarquer que deux d'entre eux, a et c, figurent d'eux mêmes sous leur aspect angulaire dans la conformation de la surface, tandis que b n'a été introduit qu'indirectement pour la plus grande facilité des calculs, en représentant sous la forme trigonomé-

trique $\sin b$ le coefficient vectoriel B. Au contraire les deux angles a et c caractérisent directement la manière dont le sphéro-nautile tourne en spirale ou s'épanouit en forme de cor.

143. Le lieu géométrique des centres M_1 des caractéristiques nous est fourni par les équations générales (86) (87)

$$r_1^2 = r^2 (1 + \cos^2 a \sin^4 b - 2 \cos^2 a \sin^2 b),$$

ce qui peut s'écrire

$$(144) \qquad r_1 = r \sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b},$$

et d'autre part

$$(145) \qquad \sin(\theta - \theta_1) = \frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}.$$

On en déduit:

$$r_1 = \sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b} \,.\, e^{A\left[\theta_1 + \arcsin\left(\frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}\right)\right]}.$$

Ce lieu est d'après cela une spirale logarithmique identique à la directrice et déviée de l'angle

$$\arcsin\left(\frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{tang} a \operatorname{Log}(\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b).$$

Telle sera donc la nouvelle directrice du *nautile à front générateur circulaire oblique* identique au sphéro-nautile. L'inclinaison i (88) du front reste constante, avec la valeur

$$i = \frac{\pi}{2} - a - \arcsin\left(\frac{\sin a \cos a \cos^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}\right).$$

Quant au nouveau rapport vectoriel du nautiloïde envisagé sous cet aspect, c'est celui du rayon k de la caractéristique (140) au rayon vecteur r_1 de la nouvelle directrice (144), à savoir

$$\sin b \sqrt{\frac{1 - \cos^2 a \sin^2 b}{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}.$$

A l'aide de ces éléments, on pourra, suivant la remarque générale du N° 113, appliquer au sphéro-nautile l'ensemble des recherches relatives au volume, au centre de gravité, et au moment d'inertie. Il suffira pour cela (N° 89) d'employer le multiplicateur

$$\sin(i+a)=\sqrt{\frac{\cos^2 a\cos^4 b-\sin^2 a\cos^2 a\cos^2 b+\sin^2 a}{\cos^2 a\cos^4 b+\sin^2 a}}.$$

144. Il en sera de même de la théorie du plan tangent (§ VI). Toutefois, pour cette question, le nouveau mode de génération à titre de sphérale, nous fournit en outre des ressources spéciales et plus avantageuses.

Commençons par rappeler succinctement les anciens éléments de construction (fig. 20). Si l'on envisage la caractéristique rabattue suivant le pointillé DND', nous avons en t' la trace équatoriale de sa tangente Nt'. D'autre part, en élevant Ot perpendiculaire au rayon vecteur horizontal On, et faisant avec lui l'angle O$nt = a$, nous obtenons en t la trace de la tangente à la cônhélice du point N. Celle du plan tangent est donc tt'.

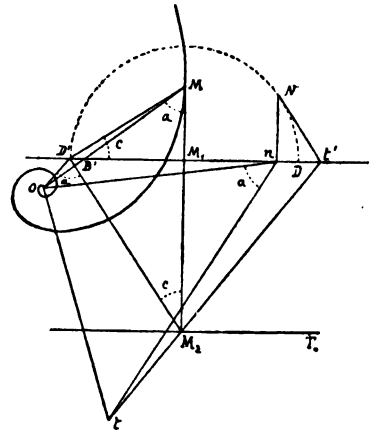

Fig. 20

Mais il est également tangent au cône de révolution circonscrit suivant la même caractéristique. Il contient donc en totalité la génératrice NM₂ de ce dernier; et sa trace tt' doit passer par le sommet M₂. Nous savons d'ailleurs que ce dernier se trouve situé sur la tangente MM₁ de la directrice. Il peut se construire en coupant cette droite par un segment capable de l'angle $2c$ décrit sur DD'; ou encore en menant l'une des perpendiculaires DM₂, D'M₂ aux rayons sphériques MD, MD'; ou enfin en tirant les droites DM₂, D'M₂ sous l'angle a par rapport aux rayons vecteurs OD, OD', des spirales-traces de la surface (1).

(1) Cette remarque permettra au besoin de reconstituer le pôle O du sphéro-nautile dont on donnerait une caractéristique DD', avec son cône circonscrit DM₂D'.

145. On voit ainsi que la trace du plan tangent peut se construire en joignant M_2t, ou M_2t', ou tt', selon la manière dont seront donnés ces trois points. Mais nous en obtenons également d'autres constructions en le considérant comme tangent à la sphère mobile, c'est-à-dire perpendiculaire à son rayon NM, qui est projeté sur l'équateur en nM. La trace du plan devant dès lors être perpendiculaire à cette projection, il suffira d'abaisser de M_2, de t, ou de t' cette normale sur nM.

Remarquons en outre que la figure une fois établie pour un point N fait dorénavant partie de l'édifice géométrique. et peut servir tout le long de la cônhélice de ce point en restant semblable à elle-même, et ne changeant de forme que de l'une à l'autre de ces courbes.

Au lieu de ce mouvement en cônhélice, faisons parcourir à N sa caractéristique de D à D′ en passant par le point maximum N_0. Le plan tangent sera d'abord vertical, suivant la trace DM_2. Il s'incline ensuite sur l'équateur, en même temps que sa trace tourne autour de M_2, depuis M_2D jusqu'à la position moyenne M_2T_0 parallèle à DD′. En effet, pour le point N_0, la trace t'_0 de la tangente de la génératrice s'éloigne à l'infini sur D′D. Le minimum de pente du plan tangent se trouve réalisé à ce moment; et il est égal à $N_0M_2M_1$ dans le plan vertical M_2M_1. Cette inclinaison a donc pour tangente trigonométrique le rapport de N_0M_1 à M_2M_1, c'est à-dire de k à H, ou de h à k, ou enfin tang c. Le minimum est donc égal à c. Au delà du point N_0, une marche inverse se produit; le plan tangent se redresse progressivement, en pivotant autour de M_2, jusqu'à une position verticale suivant M_2D'.

146. Les formules du sphéro-nautile se simplifient beaucoup lorsqu'il est équiradial. Mais au lieu de supposer dans chacune d'elles $b = \frac{\pi}{2}$, il sera plus court de repartir des relations (124), (125) qui deviennent pour la spirale logarithmique

$$\omega = \theta + a - \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{2\cos^2\lambda}{R} = \frac{1}{e^{A\theta}\sin a},$$

d'où, en éliminant θ

$$\frac{R}{2\sin a\cos^2\lambda} = e^{A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)}, \tag{146}$$

équation très simple du sphéro-nautile équiradial.

Il a pour trace

$$(147) \qquad R = 2 \sin a . e^{A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)},$$

c'est-à-dire une spirale logarithmique unique [au lieu de deux comme à l'ordinaire (N° 139)], identique à la directrice, et déviée de l'angle

$$\frac{\pi}{2} - a + \operatorname{tang} a \operatorname{Log}(2 \sin a).$$

La seconde s'est évanouie et réduite au pôle, où se trouve en effet constamment l'une des deux *retombées* de la vôute en plein cintre formée par la demi-caractéristique, tandis que la seconde décrit la courbe (147).

Comme le point le plus haut N_0 de ce plein cintre se projette au milieu du diamètre de cette circonférence, qui forme le rayon vecteur de la trace (147), le lieu des projections de ces points maxima des caractéristiques sera la spirale

$$(148) \qquad R = \sin a . e^{A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)},$$

égale à la directrice et déviée de l'angle

$$\frac{\pi}{2} - a + \operatorname{tang} a . \operatorname{Log} \sin a .$$

La *ligne de faîte* qui lui correspond sur la surface, en passant par tous les points maxima eux-mêmes, est donc une cônhélice. Son angle constant de latitude est fourni par la combinaison des équations (148) et (146), qui donne

$$2 \cos^2 \lambda_0 = 1, \qquad \cos \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \lambda_0 = \frac{\pi}{4}.$$

§ XXIII

Cônes circonscrits

147. Cherchons le lieu géométrique des sommets (N° 106) des cônes circonscrits à une sphérale quelconque, ainsi qu'à

chacune des sphéres variables, le long des diverses caractéristiques.

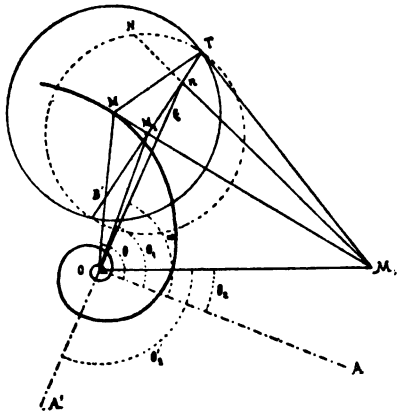

Fig. 21

La trace du plan de cette dernière est M_1D (fig. 21), normale à la tangente MM_1 de la directrice. Si nous élevons la perpendiculaire DM_2 sur le rayon MD de la sphére variable, il déterminera en M_2 le sommet, dont nous pouvons calculer les coordonnées r_2, θ_2.

On a d'abord dans le triangle MOM_2

$$\overline{OM_2}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MM_2}^2 - 2\overline{OM}\,.\,\overline{MM_2}\cos OMM_2\,,$$

$$r_2^2 = r^2 + (H+h)^2 - 2r(H+h)\cos a\,,$$

ou d'après la formule (116)

$$r_2^2 = r^2 + \frac{\varphi^2 r^2}{\varphi'^2 \sin^2 a} - 2r\frac{\varphi r}{\varphi' \sin a}\cos a\,,$$

$$(149) \qquad r_2 = \frac{1}{\varphi'}\sqrt{F^2(\varphi^2+\varphi'^2)+\varphi^2F'^2-2\varphi\varphi' F}\,.$$

Il vient en second lieu

$$\frac{\sin MOM_2}{MM_2} = \frac{\sin OMM_2}{OM_2}\,,$$

$$(150) \qquad \sin(\theta-\theta_2) = \frac{H+h}{r_2}\sin a = \frac{\varphi F}{\sqrt{F^2(\varphi^2+\varphi'^2)+\varphi^2F'^2-2\varphi\varphi' F}}\,.$$

Il n'y a plus dès lors qu'à éliminer θ entre ces deux relations pour avoir, entre r_2, θ_2, l'équation du lieu géométrique des sommets des cônes circonscrits.

148. Le calcul se simplifie d'une manière remarquable pour les sphérales vectorielles, d'indice quelconque. Nous avons vu

déjà que l'expression (121) de $H+h$ était alors indépendante de cet indice; il en sera donc de même du lieu en question.

Il vient en effet

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{r}{\cos a}\right)^2 - 2r\left(\frac{r}{\cos a}\right)\cos a = r^2 \operatorname{tang}^2 a,$$

$$r_2 = r \operatorname{tang} a = \frac{F^2}{F'},$$

et d'autre part

$$\sin(\theta - \theta_2) = \frac{r}{r_2} \operatorname{tang} a = 1,$$

(151) $$\theta = \theta_2 + \frac{\pi}{2}.$$

d'où, par l'élimination de θ

(152) $$r_2 = \frac{F^2\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right)}{F'\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Pour simplifier encore cette équation du lieu géométrique des sommets, nous la rapporterons à un axe polaire perpendiculaire au précédent, en faisant

$$\theta'_2 = \theta_2 + \frac{\pi}{2},$$

d'où cette équation

$$r^2 = \frac{F_2(\theta'_2)}{F'(\theta'_2)}.$$

149. Mais une dernière simplification peut encore être apportée à ce résultat.

Convenons de formuler l'équation de la directrice au moyen de la valeur *f de l'inverse* $\frac{1}{r}$ du rayon vecteur, et non pas, comme jusqu'ici (100), par celle F de ce rayon lui-même, en

écrivant [1]

$$\frac{1}{r} = f(\theta).$$

Il suit de cette modification

$$f(\theta) = \frac{1}{F(\theta)}, \qquad f'(\theta) = -\frac{F'(\theta)}{F^2(\theta)},$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{F'(\theta'_2)}{F^2(\theta'_2)} = -f'(\theta'_2).$$

On voit donc que l'inverse du rayon vecteur du lieu des sommets est, sauf le signe, la dérivée de l'inverse du rayon vecteur de la directrice (en ayant bien soin de faire dépendre la fonction ainsi calculée, du nouvel azimut rapporté à un axe perpendiculaire).

150. Éclairons cette méthode de calcul par les exemples qui ont été déjà envisagés.

Soit d'abord la spirale logarithmique

$$r = e^{A\theta}, \qquad \frac{1}{r} = e^{-A\theta}.$$

La dérivée est $-Ae^{-A\theta}$. Nous écrirons par conséquent, en changeant le signe

$$\frac{1}{r_2} = Ae^{-A\theta'_2}, \qquad r_2 = \operatorname{tang} a \,.\, e^{A\theta'_2} = e^{A\left(\theta_2 + \frac{\pi}{2} + \operatorname{tang} a \operatorname{Log} \operatorname{tang} a\right)}.$$

Le lieu des sommets est donc une spirale égale déviée (par rapport à l'ancien axe polaire) de l'angle

$$\frac{\pi}{2} + \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{Log}(\operatorname{tang} a).$$

---

[1] J'indiquerai plus loin (N° 173) comment ce même changement permet de donner une forme encore plus simple aux équations fondamentales (122 à 125) des sphérales équiradiales. Il m'a paru toutefois plus avantageux de conserver jusque là nos mêmes notations.

Soit, comme second exemple, la spirale sinusoïde

$$r^n = \cos^n \theta, \qquad \frac{1}{r} = \cos^{-\frac{1}{n}} n\theta.$$

La dérivée est $\sin n\theta . \cos^{-\frac{n+1}{n}} n\theta$. Nous poserons donc

$$\frac{1}{r_2} = -\sin n\theta'_2 \cos^{-\frac{n+1}{n}} n\theta'_2, \qquad r_2 = -\frac{\cos^{\frac{n+1}{n}} n\theta'_2}{\sin n\theta'_2}.$$

On obtient par exemple pour la parabole $\left(n = -\frac{1}{2}\right)$, une droite; pour le cercle ($n = 1$), une cissoïde de Dioclès; pour la ligne droite ($n = -1$), cette droite elle même.

Envisageons encore les spirales algébriques

$$r = \theta^n, \qquad \frac{1}{r} = \theta^{-n}.$$

La dérivée est $-n\theta^{-n-1}$. Nous écrivons donc

$$\frac{1}{r_2} n = \theta'^{-n-1}_2, \qquad r_2 = \frac{\theta'^{n+1}_2}{n}.$$

Le lieu des sommets est d'après cela une autre spirale algébrique d'un ordre supérieur d'une unité à celui de la proposée.

Par exemple, la spirale hyperbolique ($n = -1$) donne, comme lieu des sommets, un cercle ($n = 0$).

Soit enfin l'équation des coniques rapportées à leur foyer

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}(1 + e\cos\theta).$$

La dérivée est $-\frac{ae}{b^2}\sin\theta$, nous écrivons donc en changeant le signe

$$\frac{1}{r_2} = \frac{ae}{b^2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{c}{b^2}\cos\theta.$$

Le lieu cherché est d'après cela

$$r_2 \cos\theta = \frac{b^2}{c}$$

c'est-à-dire la directrice relative au foyer considéré.

§ XXIV

Directrice en coordonnées intrinsèques

151. Reprenons ici l'usage des coordonnées intrinséques, afin de pouvoir envisager les courbes qui déjà nons ont été accessibles par cette voie (§ XVI), et en déterminer les surfaces sphérales équiradiales, dans lesquelles le rayon sphérique reste, comme ci-dessus, constamment égal au rayon *vecteur* r de cette ligne par rapport à un certain pôle, encore bien qu'elle soit représentée par son équation naturelle, entre son rayon *de courbure* ρ et son angle de contingence

$$\rho = F(\varepsilon).$$

En faisant passer par ce pôle deux axes rectangulaires, nous aurons

$$dx = ds \cos \varepsilon, \qquad dy = ds \sin \varepsilon;$$

$$x = \int_0^\varepsilon \rho \cos \varepsilon \, d\varepsilon, \qquad y = \int_0^\varepsilon \rho \sin \varepsilon \, d\varepsilon.$$

La sphère qui a son centre au point (x, y) et comme rayon r, sera représentée, avec les coordonnées courantes X, Y, Z par l'équation

$$\left(X - \int_0^\varepsilon F \cos \varepsilon \, d\varepsilon\right)^2 + \left(Y - \int_0^\varepsilon F \sin \varepsilon \, d\varepsilon\right)^2 + Z^2$$
$$= \left(\int_0^\varepsilon F \cos \varepsilon \, d\varepsilon\right)^2 + \left(\int_0^\varepsilon F \sin \varepsilon \, d\varepsilon\right)^2,$$

ou en développant

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\left(X \int_0^\varepsilon F \cos \varepsilon \, d\varepsilon + Y \int_0^\varepsilon F \sin \varepsilon \, d\varepsilon\right) = 0.$$

Si l'on passe aux coordonnées mixtes, on obtient cette formule

$$(153) \qquad \frac{R}{2 \cos^2 \lambda} = \int_0^\varepsilon F(\varepsilon) \cos(\varepsilon - \omega) \, d\varepsilon,$$

remarquable par sa grande simplicité et sa complète généralité.

Pour avoir l'enveloppe de cette sphére, prenons la dérivée par rapport au paramètre ε. Elle sera simplement

$$F(\varepsilon)\cos(\varepsilon-\omega)=0\,.$$

Mais F ne saurait être annulé d'une manière permanente. Il nous faut donc poser

$$\cos(\varepsilon-\omega)=0\,,\qquad \varepsilon-\omega=\frac{\pi}{2}\,.$$

Ce résultat est d'ailleurs conforme à ce qu'indique la figure 19 par son triangle OM_1A.

L'élimination est maintenant possible une fois pour toutes; et si nous reportons cette valeur de ε dans la formule (153), nous obtenons, pour la sphérale équiradiale d'une directrice quelconque, l'équation générale

$$(154)\qquad \frac{R}{2\cos^2\lambda}=\int_0^{\omega+\frac{\pi}{2}}F(\varepsilon)\cos(\varepsilon-\omega)\,d\varepsilon\,.$$

Le problème se trouve ainsi ramené aux quadratures.

152. Considérons comme exemple la cycloïde rapportée à son sommet

$$\rho=\cos\varepsilon\,.$$

Nous aurons successivement

$$\frac{2R}{\cos^2\lambda}=4\int_0^{\omega+\frac{\pi}{2}}\cos\varepsilon(\cos\varepsilon\cos\omega+\sin\varepsilon\sin\omega)\,d\varepsilon$$

$$=\int_0^{\omega+\frac{\pi}{2}}[\cos\omega(1+\cos 2\varepsilon)+\sin\omega\sin 2\varepsilon]\,d(2\varepsilon)$$

$$=\Big[\cos\omega(2\varepsilon+\sin 2\varepsilon)-\sin\omega\cos 2\varepsilon\Big]_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\omega+\frac{\pi}{2}}$$

$$=[\cos\omega(2\omega+\pi)-\cos\omega\sin 2\varepsilon+\sin\omega\cos 2\omega]+\sin\omega$$

$$=(2\omega+\pi)\cos\omega-\sin(2\omega-\omega)+\sin\omega\,,$$

et enfin

$$\frac{R}{\cos^2 \lambda} = \left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \cos \omega .$$

On peut conduire un calcul semblable pour obtenir l'équation da la sphérale, absolument différente de celle-ci, qui serait déduite de la même directrice, rapportée non plus à son sommet mais à son point de rebroussement, sous la forme

$$\rho = \sin \varepsilon .$$

153. Envisageons maintenant l'épicycloïde rapportée, soit à son sommet, soit à son point de rebroussement, par l'une ou l'autre des équations

$$\rho = \cos q\varepsilon , \qquad \rho = \sin q\varepsilon .$$

Il suffira pour effectuer l'intégration (154) de décomposer en somme de sinus ou de cosinus le produit de facteurs. Il faut toutefois excepter de cette analyse l'hypothèse $q = 1$, car l'intégration conduit à diviser par $q - 1$. C'est pour cette raison que nous avons considéré directement ce cas, qui est celui de la cycloïde.

154. On a pour la chainette rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} ,$$

$$\int \frac{\cos(\varepsilon - \omega)}{\cos^2 \varepsilon} d\varepsilon = \frac{\sin \omega}{\cos \varepsilon} + \cos \omega \operatorname{Log} \operatorname{tang} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right) ,$$

$$\frac{R}{2 \cos^2 \lambda} = -1 + \cos \omega \operatorname{Log} \left(-\cot \frac{\omega}{2}\right) .$$

Il vient pour la tractrice rapportée à son point de rebroussement

$$\rho = \operatorname{tang} \varepsilon ,$$

$$\int \operatorname{tang} \varepsilon \cos(\varepsilon - \omega) d\varepsilon = -\cos(\varepsilon - \omega) + \sin \omega \operatorname{Log} \operatorname{tang} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\frac{R}{2 \cos^2 \lambda} = \cos \omega + \sin \omega \operatorname{Log} \left(-\cot \frac{\omega}{2}\right) .$$

On a encore pour la chainette d'égale résistance rapportée à son sommet

$$\rho = \frac{1}{\cos \varepsilon},$$

$$\int \frac{\cos(\varepsilon - \omega)}{\cos \varepsilon} d\varepsilon = \varepsilon \cos \omega - \sin \omega \operatorname{Log} \cos \varepsilon,$$

$$\frac{R}{2 \cos^2 \lambda} = \left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \cos \omega - \sin \omega \operatorname{Log}(-\sin \omega).$$

Ces diverses équations ne fournissent de valeurs réelles que pour les longitudes négatives; ce qui est d'ailleurs conforme à l'allure de ces trois directrices.

155. Envisageons enfin la développante de cercle d'ordre q, rapportée, ainsi que toutes les précédentes, à un même point de la circonférence. Elle a pour équation relative à ce point de rebroussement

$$\rho = \varepsilon^q.$$

L'intégration (154) de la fonction $\varepsilon^q \cos(\varepsilon - \omega)$ s'effectuera par parties, en réduisant successivement la valeur de l'exposant, qui est essentiellement positif. Il est inutile de développer ici ce procédé classique.

Je m'attacherai de préférence à déduire de cette même courbe une autre sphérale équiradiale absolument différente, en rapportant les rayons vecteurs au centre du cercle, et non plus au point de rebroussement. La configuration générale de la surface en acquièrera d'ailleurs plus d'harmonie.

Appelons à cet effet α l'azimut du point du cercle générateur qui (par une série de tangentes successivement rectangulaires les unes sur les autres, pour passer de chaque développante à la suivante), nous conduit au point caractérisé par ε sur la q^e développante. Les coordonnées rectangulaires de ce dernier peuvent s'exprimer de la manière suivante

$$x = \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \cos\left(\alpha - k\frac{\pi}{2}\right), \qquad y = \sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!} \sin\left(\alpha - k\frac{\pi}{2}\right).$$

L'équation entre X, Y, Z de la sphère variable (après qu'on l'a, comme au N° 151, développée et débarrassée de la somme des

séries Σ qui se trouvent dans les deux membres), se réduit à

$$X^2+Y^2+Z^2-2X\sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!}\cos\left(\alpha-k\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-2Y\sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!}\sin\left(\alpha-k\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

ou en coordonnées mixtes

$$\frac{R}{2\cos^2\lambda}=\sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!}\left[\cos\omega\cos\left(\alpha-k\frac{\pi}{2}\right)+\sin\omega\sin\left(\alpha-k\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$=\sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!}\cos\left(\alpha-\omega-k\frac{\pi}{2}\right).$$

Prenons maintenant la dérivée par rapport au paramètre angulaire α

$$0=\sum_0^q \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}\cos\left(\alpha-\omega-k\frac{\pi}{2}\right)-\sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!}\sin\left(\alpha-\omega-k\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\sum_0^q \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}\cos\left(\alpha-\omega-k\frac{\pi}{2}\right)+\sum_0^q \frac{\alpha^k}{k!}\cos\left[\alpha-\omega-(k-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Or le terme en α^{k-1} de la seconde somme a pour argument $\alpha-\omega-(k-2)\frac{\pi}{2}$. Cet angle diffère de π avec celui du terme correspondant de la première série. Leurs cosinus sont donc égaux et de signes contraires, et ces deux expressions se détruisent mutuellement. Il ne subsiste par conséquent, de tout l'ensemble, que l'unique terme en α^q de la seconde somme, car il n'a pas de correspondant. La formule se réduit dès lors à

$$\cos\left[\alpha-\omega-(q-1)\frac{\pi}{2}\right]=0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha-\omega-(q-1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},\qquad \alpha-\omega=q\frac{\pi}{2}.$$

L'équation de la sphérale équiradiale devient par la substitu-

tion de cette valeur dans celle de la sphére

$$\frac{R}{2\cos^2\lambda} = \sum_0^q \frac{\left(\omega + q\frac{\pi}{2}\right)^k}{k!} \cos(q-k)\frac{\pi}{2}.$$

Rapportons la, pour plus de simplicité, à un premier-méridien que nous aurons fait tourner, dans le sens négatif, de q quadrants. Si nous appelons Ω cette nouvelle longitude

$$\Omega = \omega + q\frac{\pi}{2}, \qquad \alpha = \Omega,$$

il viendra simplement

$$\frac{R}{2\cos^2\lambda} = \sum_0^q \frac{\Omega^k}{k!} \cos(q-k)\frac{\pi}{2}.$$

La trace équatoriale ($\lambda = 0$) de cette sphérale sera donc

$$\frac{R}{2} = \sum_0^q \frac{\Omega^k}{k!} \cos(q-k)\frac{\pi}{2}.$$

Cette équation présente une forme très simple; car le facteur $\cos(q-k)\frac{\pi}{2}$ a toujours pour valeur l'unité avec des signes alternatifs. Tous les termes $\frac{\Omega^k}{k!}$ seront donc de même parité, de signes alternés, et sans coefficients étrangers.

Si l'on considère en particulier (fig. 22) la développante de cercle proprement dite ($q = 1$), la trace équatoriale devient

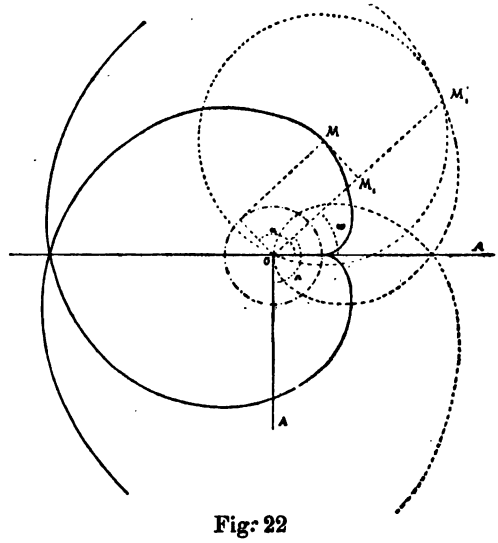

Fig. 22

$$R = 2\Omega,$$

c'est-à-dire une spirale d'Archimède.

QUATRIEME PARTIE

Lignes de courbure, surfaces podaires

§ XXV

Lignes de courbure en coordonnées rectangulaires

156. Si l'on envisage les normales communes à une sphérale et à la sphère qui s'y raccorde suivant une caractéristique, elles forment un cône de révolution, dont le sommet occupe le point décrivant de la directrice. Ces droites se rencontrent donc consécutivement, et par suite la caractéristique est l'une des deux lignes de courbure en chacun de ses points.

La seconde doit être normale à celle-ci. Nous possédons par conséquent, dans le plan tangent, qui nous est connu, les deux directions des sections principales.

La tangente de la seconde ligne de courbure n'est autre que la génératrice NM_2 du cône de révolution circonscrit suivant la caractéristique. Cette droite se trouve en effet dans le plan tangent, et elle est normale au cercle de base du cône.

Connaissant ainsi la direction nM_2 de la tangente à la projection équatoriale de la ligne de courbure, nous pouvons entreprendre d'en former l'équation différentielle. Je traiterai cette question successivement en coordonnées rectangulaires, et dans le système polaire.

157. La sphérale nous est fournie par les deux équations (83), (84). Cette dernière représente le plan de la caractéristique qui correspond à l'abscisse α du point décrivant M. Si donc nous menons par l'origine un plan qui lui soit parallèle, il aura pour équation

$$X + YF' = 0.$$

Quant au plan tangent de la sphérale, il est perpendiculaire au rayon de la sphère, dont les cosinus directeurs sont proportionnels aux différences respectives des coordonnées (x, y, z) du point N, et de celles $(\alpha, F, 0)$ du centre M. Tels seront

donc les coefficients angulaires de l'équation du plan tangent

$$(155) \qquad (x-\alpha)\,X+(y-F)\,Y+zZ=0\,.$$

L'ensemble de ces deux relations représente la parallèle menée par l'origine à la tangente de la caractéristique, et l'on peut le mettre sous la forme

$$\frac{X}{zF'}=\frac{Y}{-z}=\frac{Z}{(y-F)-(x-\alpha)\,F'}\,.$$

Élevons par l'origine le plan perpendiculaire

$$zF'X-zY+[y-F-(x-\alpha)\,F']\,Z=0\,.$$

Il sera parallèle au plan qui serait conduit par N de manière à couper le plan tangent suivant la tangente de la ligne de courbure. L'ensemble de cette égalité et de (155) représente par conséquent la parallèle à cette tangente.

Nous en obtiendrons la projection équatoriale par l'élimination de Z entre ces deux formules, ce qui donne

$$\begin{aligned} &X\,\{(x-\alpha)\,[y-F-(x-\alpha)\,F']-z^2F'\} \\ &+Y\,\{(y-F)\,[y-F-(x-\alpha)\,F']+z^2\}=0\,. \end{aligned}$$

De là le coefficient angulaire de la projection horizontale de la tangente cherchée

$$(156) \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{(x-\alpha)\,[y-F-(x-\alpha)\,F']-z^2F'}{(y-F)\,[y-F-(x-\alpha)\,F']+z^2}\,.$$

La ligne de courbure étant située sur la sphérale, les quatre quantités x, y, z, α doivent satisfaire à la fois aux deux équations (83), (84) qui la représentent. Nous sommes donc autorisés à en déduire z et α, pour en opérer ici la substitution. Celle de z peut se faire une fois pour toutes. Elle donne après toutes les réductions

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(y-F)\,[x-\alpha+(y-F)\,F']-\varphi^2F'}{(x-\alpha)\,[x-\alpha+(y-F)\,F']-\varphi^2}\,,$$

expression que l'on peut encore simplifier au moyen de l'équa-

tion (83) sous la forme définitive

$$(157) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{(y-\mathrm{F})\varphi' + \varphi\mathrm{F}'}{(x-\alpha)\varphi' + \varphi}.$$

Si maintenant, lorsque seront spécifiées dans chaque cas les fonctions F et φ, on résout cette même relation (83) par rapport à α pour en substituer ici la valeur, on aura, entre x, y, dx, dy, l'équation différentielle du premier ordre et du premier degré de la projection équatoriale de la seconde ligne de courbure de la sphérale.

158. Dans le cas le plus général, la trace de cette surface doit être l'une de ces lignes de courbure: car elle coupe orthogonalement, en raison de la symétrie de la figure par rapport à l'équateur, toutes les caractéristiques, aux points où elles traversent ce plan.

On peut le reconnaitre dans nos formules. Si l'on fait en effet $z=0$ dans l'équation (156), elle donne pour les points situés dans l'équateur

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\alpha}{y-\mathrm{F}},$$

$$(x-\alpha)\,dx + (y-\mathrm{F})\,dy = 0,$$

montrant ainsi que l'élément de cette ligne, (de composantes dx, dy), est normal à la droite qui joint le point considéré (x, y) au centre (α, F) du grand cercle de la sphère. La ligne de courbure est donc tangente à ce cercle, dont l'enveloppe constitue la trace de la sphérale.

159. Convenons transitoirement de représenter pour abréger par les lettres G, H, K, L, M, N diverses fonctions de α qui nous sont connues. L'équation différentielle (157) pourra s'écrire

$$(x\varphi' + \mathrm{G})\,dy = (y\varphi' + \mathrm{H})\,dx.$$

D'autre part la relation (84) prend la forme

$$x = -y\mathrm{F}' + \mathrm{K},$$

$$dx = -\mathrm{F}'dy - (y\mathrm{F}'' + \mathrm{K}')\,d\alpha,$$

d'où, en substituant,

$$(-yF'\varphi' + L)\,dy = (y\varphi' + H)\,[-F'dy - (yF'' + K')]\,d\alpha\,.$$

Il est très important de remarquer que le terme

$$-yF'\varphi' dy\,,$$

se trouve à la fois dans les deux membres et disparait de lui-même. Il reste alors une équation différentielle de la forme

$$(158) \qquad M\frac{dy}{d\alpha} + \varphi' F'' y^2 + Ny - HK' = 0\,.$$

Les équations de ce type ont été intégrées par Euler, mais seulement dans le cas où l'on possède directement une solution particulière. Si nous supposons l'intégration effectuée avec une constante arbitraire C, cette valeur de y fournira, au premier degré, celle de x d'après la relation (84), et la projection de la ligne de courbure se trouvera représentée par les expressions des deux coordonnées en fonction de α. Lorsque l'élimination de ce dernier sera possible, on obtiendra l'équation définitive de cette famille de courbes, dont le paramètre sera C, de même que α est celui de la première.

160. Dans plusieurs cas très étendus, la restriction d'Euler disparait, et nous pouvons d'une manière générale ramener aux quadratures l'intégration de l'équation (158).

C'est d'abord lorsque le terme en y^2 s'évanouit, ce qui peut arriver de deux manières.

En premier lieu, pour $\varphi' = 0$, ou $\varphi = \text{const.}$; ce qui se rapporte aux surfaces-tuyaux de directrices quelconques.

En second lieu, pour $F'' = 0$, c'est-à-dire $F = m\alpha + n$, indiquant une directrice rectiligne, quelle que soit la loi du rayon sphérique. En un mot, c'est le cas des surfaces de révolution de méridienne quelconque.

Dans ces deux circonstances, nous nous trouvons ramenés à une équation linéaire en y, que l'on sait intégrer au moyen de deux quadratures.

La seconde simplification de l'équation différentielle (158) concerne la disparition du terme indépendant de y; ce qui peut encore arriver de deux manières.

D'abord pour $K' = 0$, ou $K = \text{const.}$ Cette circonstance est

facile à formuler (¹); mais ne semble pas mériter de retenir l'attention.

Il reste enfin la seconde solution $H = 0$, ou, en se reportant à l'équation (157)

$$F\varphi' - \varphi F' = 0\,, \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{F'}{F}\,, \qquad \operatorname{Log}\varphi = \operatorname{Log} F + \operatorname{Log} B\,,$$

$$\varphi = BF\,,$$

c'est-à-dire précisement la condition vectorielle, avec une directrice et un module B quelconques.

Dans ces deux derniers cas, l'équation différentielle (158) devient

$$M\frac{dy}{d\alpha} + \varphi' F'' y^2 + Ny = 0\,,$$

ou, en la divisant par y^2

$$M\frac{\left(d\frac{1}{y}\right)}{d\alpha} - N\left(\frac{1}{y}\right) - \varphi' F'' = 0\,,$$

équation linéaire par rapport à $\frac{1}{y}$.

(¹) Si l'on se reporte à la relation (84) pour préciser la forme de la fonction K, il vient, en représentant par $\frac{g}{2}$ la valeur de la constante

$$K = \alpha + FF' - \varphi\varphi' = \frac{g}{2}\,,$$

$$2\varphi\varphi' = 2FF' + 2\alpha - g\,,$$

$$\varphi^2 = F^2 + \alpha^2 - g\alpha\,.$$

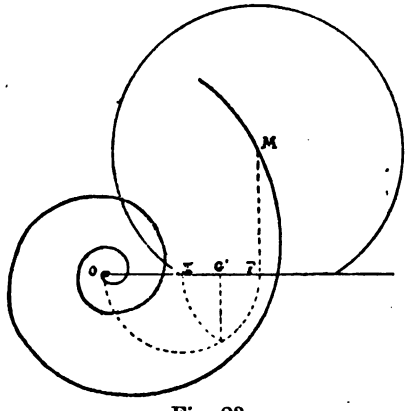

Fig. 23

Portons en OG (fig. 23) la longueur g, et par le point fixe G menons la verticale GH jusqu'à la rencontre de la circonférence décrite sur $OP = \alpha$ comme diamètre. Nous aurons en GP la longueur $\alpha - g$, et en PH la moyenne géométrique entre α et $\alpha - g$. En rabattant ce segment en PK, on obtiendra dans le carré de l'hypoténuse MK la somme des carrés $\overline{MP}^2 = F^2$, et $\overline{PK}^2 = \alpha(\alpha - g)$, c'est-à-dire φ^2. Telle est donc la construction du rayon sphérique $\varphi = MK$.

161. Attachons nous au cas des sphérales vectorielles pour le développer complètement. Le coefficient B disparait de lui-même de l'équation (157) qui se réduit à

$$(xF' + F - \alpha F')\,dy = F'y\,dx\,,$$

tandis que (84) devient de son côté

$$(159) \qquad x = -yF' + \alpha + FF'\cos^2 b\,,$$

$$dx = -F'dy + d\alpha\,[-yF'' + 1 + (FF'' + F'^2)\cos^2 b]\,.$$

Il vient dès lors en substituant

$$F(1 + F'^2\cos^2 b)\frac{dy}{d\alpha} = F'y\,[-yF'' + 1 + (FF'' + F'^2)\cos^2 b]\,,$$

d'où, en divisant par y^2

$$\frac{F}{F'}(1 + F'^2\cos^2 b)\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{d\alpha} + [1 + (FF'' + F'^2)\cos^2 b]\left(\frac{1}{y}\right) - F'' = 0\,.$$

L'intégrale de cette équation linéaire obtenue par la méthode classique donne

$$(160) \quad y = \frac{e^{\int \frac{F'}{F}\left[\frac{1 + (FF'' + F'^2)\cos^2 b}{1 + F'^2\cos^2 b}\right] d\alpha}}{C + \int \frac{F'F''}{F(1 + F'^2\cos^2 b)} \cdot e^{\int \frac{F'}{F}\left[\frac{1 + (FF'' + F'^2)\cos^2 b}{1 + F'^2\cos^2 b}\right] d\alpha} \cdot d\alpha}\,,$$

et l'équation de la seconde famille de lignes de courbure résultera de l'élimination de α entre (159) et (160), lorsque sera spécifiée la fonction F.

162. Pour présenter une application de cette méthode, considérons la parabole

$$y = x^2\,, \qquad F = \alpha^2\,, \qquad F' = 2\alpha\,, \qquad F'' = 2\,.$$

La première quadrature est alors

$$\int \frac{2d\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1 + 6\alpha^2\cos^2 b}{1 + 4\alpha^2\cos^2 b} = \mathrm{Log}\,(\alpha^2\sqrt{1 + 4\alpha^2\cos^2 b})\,.$$

La seconde devient d'après cela

$$\int \frac{4\alpha d\alpha}{\sqrt{1+4\alpha^2\cos^2 b}} = \frac{\sqrt{1+4\alpha^2\cos^2 b}}{\cos^2 b}.$$

L'intégrale de l'équation différentielle est donc

$$(161) \qquad y = \frac{\alpha^2\cos^2 b\sqrt{1+4\alpha^2\cos^2 b}}{C+\sqrt{1+4\alpha^2\cos^2 b}}.$$

Il vient dès lors (159)

$$x = \alpha + \frac{2C\alpha^3\cos^2 b}{C+\sqrt{1+4\alpha^2\cos^2 b}}.$$

L'équation (161) est du sixième degré à puissances paires de α, et peut par conséquent être résolue à l'aide des expressions du troisième degré. Il suffira de les substituer dans cette dernière relation, pour avoir entre x, y, C l'équation de la seconde famille de lignes de courbure, quelque soit le module vectoriel b.

163. Attachons nous spécialement au cas des sphérales *équilatères,* pour lesquelles le rayon sphérique reste constamment égal à l'ordonnée de la directrice.

Si nous faisons $\cos b = 0$, les deux quadratures peuvent s'effectuer *quelle que soit cette directrice.* La première devient en effet

$$\int \frac{F'}{F} d\alpha = \operatorname{Log} F, \qquad e^{\int \frac{F'}{F} d\alpha} = F,$$

et la seconde se réduit dès lors à

$$\int F'F'' d\alpha = \frac{F'^2}{2}.$$

L'intégrale de l'équation linéaire devient donc entièrement explicite

$$(162) \qquad y = \frac{2F}{F'^2 + C}.$$

De son côté, la relation (159) se réduit à

$$x = \alpha - yF' . \tag{163}$$

Telles sont les deux équations finies entre lesquelles il suffira d'éliminer α.

164. Reprenons comme exemple de sphérale équilatère la parabole [1]

$$y = x^2, \qquad F = \alpha^2, \qquad F' = 2\alpha .$$

Les formules (162) (163) nous donnent alors

$$y = \frac{2\alpha^2}{4\alpha^2 + C}, \qquad x = \alpha - \frac{4\alpha^3}{4\alpha^2 + C} = \frac{C\alpha}{4\alpha^2 + C},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2\alpha}{C}, \qquad \alpha = \frac{Cy}{2x}, \qquad y = \frac{Cy^2}{2Cy^2 + 2x^2},$$

et finalement

$$\frac{x^2}{C} + y^2 - \frac{y}{2} = 0 .$$

Ponr $C = 1$, et $C = \infty$, nous retrouvons distinctement les deux parties constitutives de la trace équatoriale (N° 128) de la sphérale étudiée ci-dessus, à savoir (N° 132) le cercle qui a son centre au foyer de la parabole (fig. 18), et la tangente au sommet.

Les autres valeurs de C donnent des ellipses ayant pour petit axe le diamètre de ce cercle dirigé suivant l'axe de la parabole.

Si l'on reporte cette valeur de x^2 dans l'équation (105) de la sphérale, il vient

$$z = y\sqrt{C - 1} .$$

---

[1] On ne doit pas en effet chercher la solution de ce cas limite dans la formule (161), en y faisant $\cos b = 0$; car nous avons été, au cours des calculs, conduits à diviser par $\cos b$.

Je ne m'arrêterai pas à développer un exemple analogue relatif à la parabole cubique $y = x^3$. L'équation (163) se réduit alors au second degré.

Les lignes de courbure sont donc renfermées dans une série de plans se mouvant à charnière autour de la tangente au sommet de la parabole directrice, depuis celui de l'équateur jusqu'à la position verticale. Elles sont par conséquent elles-mêmes des ellipses.

Leurs projections sur ce dernier plan seront donc encore d'autres ellipses, que l'on obtiendrait en substituant cette dernière valeur de y dans l'égalité (105).

On voit dès lors que cette sphérale équilatère fait partie du groupe des surfaces qui admettent deux systèmes plans de lignes de courbure.

§ XXVI

Lignes de courbure en coordonnées polaires

165. Reprenons la même recherche pour les sphérales vectorielles rapportées à des coordonnées polaires; à savoir r, θ pour le point décrivant M de la directrice; R, ω pour le point n qui parcourt la projection équatoriale de la seconde ligne de courbure; R, ω, λ pour le point N de la sphérale dans l'espace.

Nous avons vu que la recherche de l'équation de cette surface revient à l'élimination de θ entre les relations générales (110), (111). Nous admettons donc qu'an cours de cette opération, l'on a obtenu, en fonction des coordonnées R, ω, λ de N, l'expression de l'azimut θ du centre M de la sphère qui s'y raccorde [1].

La tangente à la projection de la ligne de courbure étant nM_2 (fig. 21), l'équation différentielle de cette courbe pourra s'écrire

$$(164) \qquad \frac{R\,d\omega}{dR} = \operatorname{tang} OnM_2 = \operatorname{tang}(M_1nM_2 - M_1nO),$$

à la condition d'en exprimer le second membre en R, ω seulement.

Puisque le point N appartient à la caractéristique de rayon k

---

[1] Les valeurs (136), (137), (138) nous en fournissent un exemple en ce qui concerne le sphèro-nautile.

et de coordonnées ξ, z, nous avons

$$(165)\quad \operatorname{tang} M_1nM_2 = \frac{M_1M_2}{M_1n} = \frac{H}{\xi} = \frac{H}{\sqrt{k^2 - z^2}} = \frac{H}{\sqrt{k^2 - R^2 \operatorname{tang}^2 \lambda}},$$

En second lieu, le triangle M_1nO nous donne, par la proportion des sinus

$$(166)\qquad \frac{R}{r_1} \sin M_1nO = \sin OM_1n = \sin OM_1B'$$

$$= \cos OM_1M_2 = \cos(OMM_2 + MOM_1) = \cos(a + \theta - \theta_1).$$

L'angle a se déduira de l'équation de la directrice en fonction de θ. Quant à r_1 et θ_1, ils ont été déjà exprimés de même (86), (87), ainsi que H et k (118, 120).

En remettant dans la formule (164) toutes ces valeurs, et finalement celle de θ dont nous venons de parler ci-dessus, ainsi que celle de λ déduite de l'équation de la sphérale, il restera définitivement entre R, ω, dR, $d\omega$ l'équation différentielle du prepremier ordre et du premier degré de la projection équatoriale de la seconde ligne de courbure.

166. Développons cette marche pour le sphéro-nautile.

Je commence par rappeler les formules obtenues à son sujet, en me contentant de représenter dans chacune d'elles par des abréviations C_1, C_2, ..., les diverses constantes dont nous possédons explicitement l'expression en fonction de a et b; ainsi que par F_1, F_2, ..., diverses fonctions également connues.

Nous avons trouvé au N° 141

$$(139\text{ bis})\qquad h = r \cos a \sin^2 b = C_1 r,$$

$$(140\text{ bis})\qquad k = r \sin b \sqrt{1 - \cos^2 a \sin^2 b} = C_2 r,$$

$$(141\text{ bis})\qquad H = r \frac{1 - \cos^2 a \sin^2 b}{\cos a} = C_3 r,$$

$$(144\text{ bis})\qquad r_1 = r \sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b} = C_4 r,$$

$$(145\text{ bis})\qquad \theta - \theta_1 = \arcsin\left(\frac{\sin a \cos a \sin^2 b}{\sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a \cos^4 b}}\right) = C_5,$$

et enfin (N° 163)

(166 bis) $$\sin M_1nO = \frac{r_1}{R}\cos(a+\theta-\theta_1),$$

$$= C_4\frac{r}{R}\cos(a+C_5) = C_6\frac{r}{R},$$

$$\operatorname{tang} M_1nO = \frac{C_6 r}{\sqrt{R^2 - C_6^2 r^2}},$$

(165 bis) $$\operatorname{tang} M_1nM_2 = \frac{H}{\sqrt{k^2 - R^2\operatorname{tang}^2\lambda}} = \frac{C_3 r}{\sqrt{C_3^2 r^2 - R^2\operatorname{tang}^2\lambda}}.$$

L'équation différentielle devient d'après cela

(164 bis) $$R\frac{d\omega}{dR} = r\frac{C_3\sqrt{R^2 - C_6^2 r^2} - C_6\sqrt{C_3^2 r^2 - R^2\operatorname{tang}^2\lambda}}{C_3C_6 r^2 + \sqrt{(R^2 - C_6^2 r^2)(C_3^2 r^2 - R^2\operatorname{tang}^2\lambda)}}.$$

Représentons la en abrégé par

$$\frac{R d\omega}{dR} = F_1(r, R, \lambda).$$

Elle renferme encore θ par le facteur r, en outre des coordonnées R, ω, λ. Mais nous possdéons deux expressions de ce paramètre (N° 138) à savoir

(137 bis) $$\theta = \operatorname{tang} a \operatorname{Log}\left\{\frac{R}{\cos\lambda\cos^2 b}\left[\sqrt{\sin^2 a\cos^2\lambda + \cos^2 a\cos^2 b}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \sqrt{\cos^2 a\cos^2\lambda - \sin^2 a\cos^2 b}\right]\right\} = F_2(R, \lambda),$$

ainsi que

(138 bis) $$\theta = \omega + \arcsin\left(\frac{\cos a}{\cos\lambda}\sqrt{\cos^2\lambda - \cos^2 b}\right) = \omega + F_3(\lambda).$$

Cette dernière nous permet de chasser transitoirement ω pour conserver seulement λ. Elle donne en effet

$$d\omega = d\theta - F'_3(\lambda)\,d\lambda = \left(\frac{\partial F_2}{\partial R}dR + \frac{\partial F_2}{\partial\lambda}d\lambda\right) - F'_3(\lambda)\,d\lambda.$$

Il vient d'après cela, en reportant ces valeurs dans F_1

$$\frac{dR}{R}.F_1\left[e^{AF_2(R,\lambda)},\quad R,\lambda\right]=\frac{\partial F_2}{\partial R}dR+\left[\frac{\partial F_2}{\partial \lambda}-F'_3(\lambda)\right]d\lambda,$$

c'est-à-dire définitivement

$$\left(F_1-R\frac{\partial F_2}{\partial R}\right)dR=\left(\frac{\partial F_2}{\partial \lambda}-F'_3\right)d\lambda,$$

équation différentielle du premier ordre et du premier degré entre R, λ, dR, $d\lambda$.

Si on la suppose intégrée, avec une constante C, et qu'on l'adjoigne à l'équation du sphéro-nautile

$$F_2(R,\lambda)=\omega+F_3(\lambda), \tag{167}$$

qui résulte de (137 bis) et (138 bis), ou possèdera les deux équations de la seconde famille de lignes de courbure. Si l'on désire en particulier celle de la projection équatoriale dont nous nous sommes écartés momentanément, elle résulterait de l'élimination de λ entre ces deux relations.

La complication des calculs que nous venons d'esquisser semble à bon droit décourageante. Nous pouvons tout au moins présenter la solution complète ponr le cas du sphéro-nautile équiradial. Et cela suffira sans doute; car la netteté des propriétés relatives à ce cas jette une grande clarté sur l'allure de ces courbes dans les conditions générales.

167. Commençons par envisager la question pour des sphérales équiradiales de directrice quelconque. Il nous suffirait à cet égard de supposer B = 1 dans les résultats précédents, mais nous arriverons plus directement par la considération de la figure 24 spéciale à ce cas.

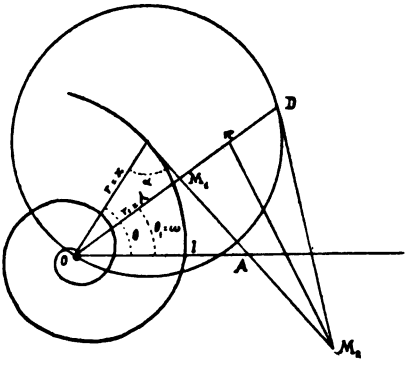

Fig. 24

Elle nous donne immédiatement

$$\frac{R d\omega}{dR} = \text{tang}\, O n M_2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 n} = \frac{H}{On - OM_1} = \frac{H}{R - r \sin a}.$$

On a d'ailleurs

$$h = MM_1 = r \cos a,$$

$$k = OM_1 = r \sin a,$$

$$H = \frac{k^2}{h} = r \frac{\sin^2 a}{\cos a},$$

et par conséquent

$$\frac{R d\omega}{dR} = \frac{r \sin^2 a}{\cos a\,(R - r \sin a)}.$$

Nous avons encore (126)

$$\sin a = \frac{F}{\sqrt{F^2 + F'^2}}, \qquad \cos a = \frac{F'}{\sqrt{F^2 + F'^2}},$$

$$d\omega = \frac{F^2 + 2F'^2 - FF''}{F^2 + F'^2}\, d\theta,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{R d\theta}{dR} \cdot \frac{F^2 + 2F'^2 - FF''}{F^2 + F'^2} = \frac{F^3}{F'(R\sqrt{F^2 + F'^2} - F^2)},$$

ou en renversant les fractions

$$\frac{F^2 + F^2}{F^2 + 2F'^2 - FF''} \cdot \frac{dR}{R d\theta} = \frac{F'}{F^3} R \sqrt{F^2 + F'^2} - \frac{F'}{F},$$

et en divisant par R

$$\frac{F}{F'} \cdot \frac{F^2 + F'^2}{F^2 + 2F'^2 - FF''} \frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\theta} - \left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\sqrt{F^2 + F'^2}}{F^2} = 0,$$

équation linéaire entre $\frac{1}{R}$ et θ.

Écrivons la sous la forme abrégée

$$\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\theta} - U\left(\frac{1}{R}\right) + V = 0,$$

en représentant par les coefficients U, V, ces fonctions de θ

$$U = \frac{F'}{F} \cdot \frac{F^2 + 2F'^2 - FF''}{F^2 + F'^2}, \qquad V = U\frac{\sqrt{F^2 + F'^2}}{F^2}.$$

Elle aura pour intégrale

$$\frac{1}{R} = e^{\int U d\theta}\left(C - \int V e^{-\int U d\theta} d\theta\right).$$

Le problème se trouve donc ramené aux quadratures, et il ne restera plus qu'à éliminer θ dans chaque cas entre les deux équations

$$(168) \qquad \begin{cases} R = \dfrac{e^{-\int U d\theta}}{C - \int V e^{-\int U d\theta} d\theta}, \\ \omega = \theta + \text{arc tang}\dfrac{F}{F'} - \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Si cette élimination reste impossible, nous possédons tout au moins les expressions explicites des deux coordonnées R, ω en fonction du paramètre auxiliaire θ.

168. Appliquons cette théorie au sphéro-nautile équiradial, en traitant a comme une constante

$$F = e^{A\theta}, \qquad F' = Ae^{A\theta},$$

$$F^2 + F'^2 = \frac{e^{2A\theta}}{\sin^2 a}; \qquad F^2 + 2F'^2 - FF'' = \frac{e^{2A\theta}}{\sin^2 a},$$

$$U = A, \qquad \int U d\theta = A\theta,$$

$$V = \frac{Ae^{-A\theta}}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sin^2 a} e^{-A\theta},$$

$$\int V e^{-\int U d\theta} d\theta = \frac{\cos a}{\sin^2 a} \int e^{-2A\theta} d\theta = -\frac{e^{-2A\theta}}{2 \sin a},$$

$$\frac{1}{R} = e^{A\theta}\left(C + \frac{e^{-2A\theta}}{2 \sin a}\right),$$

$$R = \frac{2 \sin a}{Ce^{A\theta} + e^{-A\theta}},$$

$$\omega = \theta + a - \frac{\pi}{2}, \qquad \theta = \omega + \frac{\pi}{2} - a,$$

et enfin

$$(169) \qquad R = \frac{2 \sin a}{Ce^{A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)} + e^{-A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)}}.$$

Pour $C = 0$, l'on retrouve la spirale (147) trace équatoriale de cette sphérale; et pour $C = \infty$, le pôle lui-même, auquel se réduit, ainsi que nous l'avons vu (N° 145), la seconde spirale-trace.

Avec toute autre valeur du paramètre C, on voit que R s'annule pour $\omega = \pm\infty$. La ligne de courbure est donc, dans ses deux sens, asymptote au pôle.

Elle comporte d'après cela un maximum d'éloignement de ce point, c'est-à-dire de la valeur de R, ou un minimum de son dénominateur. Et en effet le produit des deux termes qui le composent étant constant, leur somme atteint ce minimum au moment de leur égalité

$$Ce^{A\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - a\right)} = e^{-A\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - a\right)},$$

$$C = e^{-2A\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - a\right)},$$

Si donc, au lieu de C, nous adoptons pour constituer le paramètre arbitraire de la seconde famille des lignes de courbure, cet azimut ω_0 du *sommet* de la courbe, l'équation deviendra, en y remplaçant C par sa valeur

$$(170) \qquad R = \frac{2 \sin a \,.\, e^{A\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} + a\right)}}{e^{A(\omega - \omega_0)} + e^{-A(\omega - \omega_0)}},$$

L'expression R_0 du rayon maximum est d'après cela (pour $(\omega = \omega_0)$

$$(171) \qquad R_0 = \sin a \,.\, e^{A\left(\omega_0 + \frac{\pi}{2} - a\right)}.$$

Cette équation, si l'on y envisage R_0 et ω_0 comme des coordonnées courantes, représente le lieu géométrique des sommets. On y recounait celle de la projection de la ligne de faîte (148).

Supposons que, pour étudier en son particulier chacune des lignes de courbure, on la rapporte à un axe polaire spécial pour elle, et passant par son sommet, il faudra it prendre à cet effet comme coordonnée azimutale

$$\Omega = \omega - \omega_0 ,$$

en déplaçant de l'angle ω_0 l'ancien axe polaire. L'équation de la projection prend alors cette forme très simple

$$R = \frac{2R_0}{e^{A\Omega} + e^{-A\Omega}}.$$

C'est celle de la *spirale de Poinsot*, ou de la projection de l'*herpolhodie-limite* qui correspond au cas où la distance du plan fixe au centre de l'ellipsoïde générateur est égale au demi-axe moyen de ce dernier.

La famille des secondes lignes de courbure du sphéro-nautile équiradial a donc la même projection équatoriale que ces herpolhodies spéciales, de rayons maxima gradués et disposés dans des directions progressivement variables.

La disposition des lignes de courbure elles-mêmes sur la surface devient dès lors très nette. En son point le plus élevé, chaque caractéristique est traversée normalement, et parallèlement à l'équateur par une de ces lignes, qui plonge à partir de là sur les deux versants, pour y serpenter d'une manière spiraloïde, asymptotiquement à l'équateur et au pôle.

169. Prenons comme second exemple la spirale sinusoïde

$$r^n = \cos n\theta ,$$

$$F = \cos^{\frac{1}{n}} n\theta , \quad F' = -\cos^{\frac{1-n}{n}} n\theta \sin n\theta , \quad F'' = (\sin^2 n\theta - n) \cos^{\frac{1-2n}{n}} n\theta ,$$

$$\frac{F}{F'} = -\cot n\theta\,, \quad \sqrt{F^2 + F'^2} = \cos^{\frac{1-n}{n}} n\theta\,,$$

$$F^2 + 2F'^2 - FF'' = (n+1)\cos^{\frac{2(1-n)}{n}} n\theta\,,$$

$$U = -(n+1)\operatorname{tang} n\theta\,, \quad \int U d\theta = \frac{n+1}{n}\operatorname{Log}\cos n\theta\,,$$

$$e^{\int U d\theta} = \cos^{\frac{n+1}{n}} n\theta\,,$$

$$V = -(n+1)\sin n\theta \cos^{\frac{-1-2n}{n}} n\theta, \quad Ve^{-\int U d\theta} = -(n+1)\sin n\theta \cos^{\frac{-2-3n}{n}} n\theta,$$

$$\int Ve^{-\int U d\theta} d\theta = -\frac{1}{2}\cos^{-2\frac{n+1}{n}} n\theta\,.$$

$$\frac{1}{R} = \cos^{\frac{n+1}{n}} n\theta \left[C + \frac{1}{2}\cos^{-2\frac{n+1}{n}} n\theta\right],$$

et enfin

$$R = \frac{2\cos^{\frac{n+1}{n}} n\theta}{1 + 2C\cos^{2\frac{n+1}{n}} n\theta}\,.$$

On a d'autre part (124)

$$\operatorname{tang}(\theta - \omega) = \frac{F'}{F} = -\operatorname{tang} n\theta\,,$$

$$\theta - \omega = -n\theta\,, \qquad \theta = \frac{\omega}{n+1}\,,$$

et par conséquent l'équation définitive

$$(172) \qquad R = \frac{2\cos^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{n}{n+1}\omega\right)}{2C\cos^{2\left(\frac{n+1}{n}\right)}\left(\frac{n}{n+1}\omega\right) + 1}\,.$$

Pour $C = 0$, l'on retrouve la trace horizontale (128) de la sphérale.

170. Considérons enfin la spirale algébrique

$$F = \theta^n, \quad F' = n\theta^{n-1}, \quad F'' = n(n-1)\theta^{n-2},$$

$$\frac{F}{F'} = \frac{\theta}{n}, \quad \sqrt{F^2 + F'^2} = \theta^{n-1}\sqrt{\theta^2 + n^2},$$

$$F^2 + 2F'^2 - FF'' = \theta^{2n-2}[\theta^2 + n(n+1)].$$

$$U = \frac{n}{\theta}\left(1 + \frac{n}{\theta^2 + n^2}\right),$$

$$\int U d\theta = (n+1)\operatorname{Log}\theta - \operatorname{Log}(\sqrt{\theta^2 + n^2}),$$

$$e^{\int U d\theta} = \frac{\theta^{n+1}}{\sqrt{\theta^2 + n^2}},$$

$$V = \frac{n(\theta^2 + n^2 + n)}{\sqrt{\theta^2 + n^2}}\theta^{-n-2}, \quad Ve^{\int U d\theta} = n(\theta^2 + n^2 + n)\theta^{-2n-3},$$

$$\int Ve^{\int U d\theta} d\theta = -\frac{\theta^2 + n^2}{2\theta^{2n+2}},$$

et enfin

$$R = \frac{2\theta^{n+1}\sqrt{\theta^2 + n^2}}{\theta^2 + n^2 + 2C\theta^{2n+2}}. \tag{173}$$

Il arrive donc cette circonstance singulière que l'intégration vient de réussir, quelque soit n, tandis que ce n'est que pour un nombre limité de cas spéciaux, bien qu'assez notable, que la résolvante (129) se prête à nous procurer l'équation de la sphérale. Contentons nous de rappeler les deux plus simples.

L'hypothèse $n = 0$ nous fournit une vérification. En effet elle indique comme directrice le cercle $R = 1$. La sphérale est donc un tore équiradial. Ses secondes lignes de courbure sont ses parallèles. Or la résolvante (129) donne ici $\theta = 0$, ce qui réduit à $R = \frac{1}{C}$ l'équation (173), et fournit ainsi en effet la famille des cercles appelés parallèles.

Pour obtenir un résultat nouveau, prenons encore la valeur $n = -1$, qui correspond à la spirale hyperbolique. Nous avons déterminé sa sphérale équiradiale (132). L'équation (173) donne alors

$$R^2 = \frac{4(\theta^2 + 1)}{(\theta^2 + 1 + 2C)^2},$$

et l'on en déduit la valeur

$$(174) \qquad \theta = \sqrt{\frac{2}{R^2} - (2C+1) \pm \frac{2}{R}\sqrt{\frac{1}{R^2} - 2C}},$$

qu'il suffit de substituer dans la formule (130), pour obtenir, entre R et ω, la projection équatoriale des lignes de courbure.

171. Les sphérales équiradiales jouissent, pour leurs lignes de courbure, d'une importante propriété.

Marquons (fig. 25) en OAC, $OA'_1C'_1$, $OA''_2C''_2$, ..., une

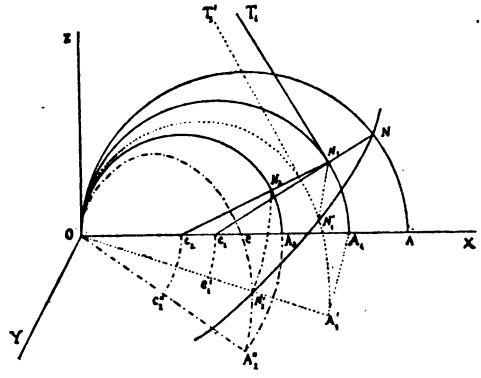

Fig. 25

suite de caractéristiques infiniment voisines. Ramenons les toutes au moyen de rotations C'_1C_1, C''_2C_2, ..., autour de l'axe zénithal, dans un même plan méridien en OAC, OA_1C_1, OA_2C_2, ... Traçons dans ce plan la trajectoire orthogonale $NN_1N_2N_3$... de ces nouveaux cercles, et cherchons la relation de cette courbe avec la ligne de courbure $NN'_1N''_2N'''_3$...

Le premier élément NN_1 est mené de N normalement à OA_1, c'est-à-dire suivant le rayon NN_1C_1. Le second sera N_1N_2 dirigé suivant le rayon $N_1N_2C_2$ du cercle consécutif, et ainsi de suite. Envisageons le plan $T_1N_1N'_1$ formé par la tangente N_1T_1 de la circonférence OC_1A_1 et l'arc $N_1N'_1$ de la rotation qui amènerait cette dernière dans sa véritable situation $OC'_1A'_1$. Cet arc élémentaire est normal au méridien ZOA, par suite à NN_1. D'autre part le rayon NN_1C_1 est perpendiculaire à la tangente N_1T_1. Donc NN_1 est abaissé de N perpendiculairement au plan $T_1N_1N'_1$; en second lieu, à partir de N_1 l'on mène dans ce plan $N_1N'_1$

normal à la tangente $N'_1T'_1$ de la ligne de courbure située dans ce même plan. D'après le théorème des trois perpendiculaires, NN'_1 sera normal à $N'_1T'_1$, et devient dès lors l'élément de cette ligne qui doit, sur la surface, couper orthogonalement les caractéristiques. La relation du rayon vecteur de l'espace ON'_1 avec sa latitude $N'_1OA'_1$ est donc, pour cette courbe, la même que celle des éléments correspondants ON_1 et N_1OA_1 de la trajectoire plane, puisqu'lls sont respectivement égaux En d'autres termes, l'équation entre R et λ de la ligne de courbure (à joindre à celle de la sphérale pour représenter cette ligne) ne diffère pas de celle de la trajectoire plane qui relie ces mêmes éléments. Or celle-ci est immuable, et il suffit de la trouver une fois pour toutes; par conséquent *elle reste la même pour toutes las sphérales équiradiales, quelle que soit leur directrice.*

Rien de plus simple d'ailleurs que de déterminer cette trajectoire orthogonale des cercles qui, dans un même plan, passent par l'origine et ont leurs centres sur l'axe des abscisse. Ce sont les circonférences qui passent à l'origine et ont leurs centres sur l'axe des ordonnées. Traçons en effet (fig. 26) deux semblables cercles, ayant leurs centres en P et Q, et se coupant en N. Joignous NP, NQ, PQ. Les triangles PQN, PQO sont égaux comme ayant leurs trois côtés respectivement égaux. L'angle N est donc droit, comme l'est l'angle O. Par suite le rayon de l'un des cercles est perpendiculaire à celui de l'autre, c'est-à-dire tangent à ce dernier. Les deux circonférences sont dès lors orthogonales.

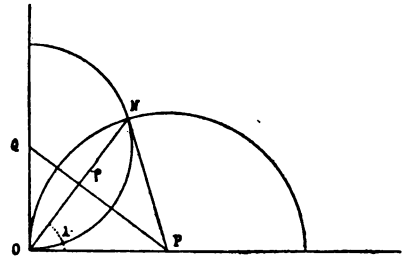

Fig. 26

172. Désignons par C le rayon OQ de l'un de ces cercles, on aura pour son rayon vecteur de l'espace

$$\rho = ON = 2OQ \cos QON = 2C \sin \lambda .$$

Mais d'autre part le rayon vecteur horizontal a pour valeur

$$R = On = \rho \cos \lambda = 2C \sin \lambda \cos \lambda = C \sin 2\lambda .$$

Telle est l'équation qui, sur une sphérale équiradiale quelconque, relie les coordonnées R, λ de la seconde ligne de courbure, et qu'il suffit de joindre à celle de la sphérale pour

représenter cette courbe. Or elle appartient à une sphère de rayon C, tangente à l'équateur au pôle. On obtient donc, pour une sphérale équiradiale quelconque, toutes les lignes de courbure du second système en la coupant par la famille des sphères qui passent au pôle tangentiellement à l'équateur.

Pour avoir la ligne de courbure qui passe en un point déterminé N de la sphérale, c'est-à-dire le centre de la sphère qui doit la contenir, il suffit de couper l'axe zénithal par le plan normal à cette courbe, à savoir le plan perpendiculaire à la génératrice NM_2 du cône circonscrit.

On peut d'après cela déduire l'équation de la ligne de courbure de celle de la sphérale, en y remplaçant λ par la valeur ci-dessus

$$\sin 2\lambda = \frac{R}{C}. \tag{175}$$

D'ailleurs la latitude ne figure dans la formule (123) (d'où découle dans chaque cas l'équation de la sphérale elle-même) que par le facteur $\frac{R}{2\cos^2\lambda}$, qui prend la valeur

$$\frac{2\cos^2\lambda}{R} = \frac{R}{1+\sqrt{1-\sin^2 2\lambda}} = \frac{CR}{C+\sqrt{C^2-R^2}} \tag{176}$$

$$= \frac{C}{R}\left(C-\sqrt{C^2-R^2}\right).$$

De là cette double conclusion :

1° L'on peut, si l'on possède l'équation de la sphérale équiradiale, éviter la double quadrature de la méthode précédente (N° 166), en se bornant à effectuer dans cette équation la substitution (176), qui procurera, entre R et ω, l'équation de la projection horizontale de la seconde famille, de paramètre C.

2° On peut inversement, s'il est impossible de déduire des formules (123) par élimination l'équation de la sphérale, ou si elle semble exiger des calculs plus compliqués, employer la méthode de la double quadrature pour obtenir entre R, ω, C l'équation équatoriale des lignes de courbure, puis alors y effectuer la substitution inverse (175)

$$C = \frac{R}{\sin 2\lambda},$$

pour avoir entre R, ω, λ l'équation de la sphérale.

Nous trouvons trois vérifications de ces deux énoncés en opérant, dans l'un et l'autre sens, le passage mutuel entre (127) et (172), (132) et (174), (146) et (169).

173. Je tiens à présenter en outre un exemple direct de la recherche des lignes de courbure sans intégration.

Envisageons pour cela comme directrice la spirale de Poinsot (N° 157)

$$r = \frac{1}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

Je saisis auparavant cette occasion pour indiquer d'une manière générale [1] comment l'introduction dans nos formules de l'inverse du rayon vecteur (qui nous a déjà parmis de simplifier la question du cône circonscrit) peut procurer le même avantage dans les formules fondamentales (123) pour la recherche de l'équation d'une sphérale équiradiale.

Si nous prenons l'équation (106) de la directrice sous la forme

$$\frac{1}{r} = f(\theta), \qquad F = \frac{1}{f}, \qquad F' = -\frac{f'}{f^2},$$

en introduisant en outre la quantité auxiliaire

$$v = \frac{\cos^2 \lambda}{R},$$

les formules (123) deviennent

$$\cos(\theta - \omega) = \frac{f}{2v}, \qquad \sin(\theta - \omega) = -\frac{f'}{2v}.$$

En ajoutant les carrés, nous obtenons une relation indépendante de ω

$$f^2 + f'^2 = 4v^2,$$

et en divisant membre à membre, une formule indépendante

(1) Voy N° 147, note 1.

de v, c'est-à-dire de R et λ

$$\operatorname{tang}(\theta - \omega) = -\frac{f'}{f}.$$

174. Ces égalités donnent pour la spirale de Poinsot

$$f = e^{\theta} + e^{-\theta}, \qquad f' = e^{\theta} - e^{-\theta},$$

$$4v^2 = (e^{\theta} + e^{-\theta})^2 + (e^{\theta} - e^{-\theta})^2,$$

$$2v^2 = e^{2\theta} + e^{-2\theta},$$

$$e^{4\theta} - 2v^2 e^{-2\theta} + 1 = 0.$$

Résolvons cette équation, en laissant les doubles signes implicitement attachés aux racines, et décomposant les radicaux superposés en radicaux simples. Il vient ainsi:

$$e^{\theta} = \sqrt{v^2 + \sqrt{v^4 - 1}} = \sqrt{\frac{v^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{v^2-1}{2}},$$

d'où

$$e^{\theta}\sqrt{2} = \sqrt{v^2+1} + \sqrt{v^2-1},$$

$$e^{-\theta}\sqrt{2} = \sqrt{v^2+1} - \sqrt{v^2-1},$$

$$e^{\theta} + e^{-\theta} = \sqrt{2(v^2+1)},$$

et par conséquent

$$\cos(\theta - \omega) = \frac{f}{2v} = \sqrt{\frac{v^2+1}{2v^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)},$$

$$\theta = \omega + \operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)},$$

$$\sqrt{2(v^2+1)} = e^{\omega + \operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{v^2}\right)}} + e^{-\omega - \operatorname{arc\,cos}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{v^2}\right)}}.$$

Si donc on remplace dans cette formule v par sa valeur

$$\frac{1}{v} = \frac{R}{\cos^2\lambda},$$

on aura l'équation de la sphérale équiradiale entre R, ω, λ.

Si au contraire on substitue pour v l'expression

$$\frac{1}{v} = \frac{2C}{R}(C - \sqrt{C^2 - R^2}),$$

on obtiendra l'équation de la projection horizontale de la seconde famille de lignes de courbure de cette sphérale entre R, ω, C.

§ XXVII

Surfaces podaires

175. Proposons nous de trouver la surface podaire d'une sphérale absolument quelconque, par rapport au pôle. Ce choix spécial ne restreint pas d'ailleurs la généralité de la recherche pour un point arbitraire du plan de la directrice, puisqu'on peut toujours y rattacher comme pôle l'équation de cette courbe.

Envisageons à part le groupe spécial de plans tangents qui, le long d'une même caractéristique, sont communs à la surface, à la sphère variable, et au cône circonscrit. L'angle d'ouverture $2c$ de ce dernier nous est connu d'une manière générale (114). Si nous abaissons du pôle une perpendiculaire sur chacun de ces plans, ces droites dessineront dans l'espace un nouveau cône de révolution, dont l'angle d'ouverture $\pi - 2c$ sera supplémentaire du celui du précédent, et l'axe parallèle à la tangente de la directrice en son point décrivant. Les intersections des génératrices de ce second cône avec les plans tangeuts perpendiculaires formeront une certaine ligne C, et le lieu de ces courbes, lorsque M parcourt la directrice, constituera la surface podaire cherchée. L'une des deux équations de cette ligne sera donc celle du cône supplémentaire en question. Nous pouvons aisément lui en adjoindre une seconde.

En effet la projetante OP du pôle O sur l'un des plans tangents du cône circonscrit, et la droite qui, dans ce plan, joint le pied P au sommet M_2 de ce cône, forment un angle droit inscrit sur la droite fixe OM_2. Le point P appartient donc à la sphère qui aurait OM_2 pour diamètre; et par conséquent la courbe C toute entière se trouve sur cette sphére, dont l'équation formera la seconde relation cherchée.

Développons ces formules, en nous limitant, comme ci-dessus, aux directrices planes.

176. Le centre de la sphére se trouve au milieu du rayon vecteur $OM_2 = r_2$ (149) de la courbe lieu géométrique du sommet du cône circonscrit à la sphérale. Elle a donc pour équation

$$\left(x - \frac{r_2}{2}\cos\theta_2\right)^2 + \left(y - \frac{r_2}{2}\sin\theta_2\right)^2 + z^2 = \left(\frac{r_2}{2}\right)^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - r_2(x\cos\theta_2 + y\sin\theta_2) = 0,$$

$$R^2(1 + \tang^2\lambda) - r_2 R(\cos\omega\cos\theta_2 + \sin\omega\sin\theta_2) = 0,$$

$$(177) \qquad \frac{R}{\cos^2\lambda} = r_2\cos(\omega - \theta_2),$$

relation dans laquelle on remettra pour r_2, θ_2, leurs valeurs (149) (150) en fonction de θ.

177. Formons en second lieu l'équation du cône supplémentaire dont le sommet se trouve au pôle.

Son axe parallèle à la tangente de la directrice fait l'angle $\theta + a$ avec l'axe polaire. Il admet donc comme équation

$$y = x\tang(\theta + a).$$

L'angle générateur $c' = \frac{\pi}{2} - c$ de ce cône a pour sinus le cosinus de c (114)

$$\sin c' = \sqrt{1 - \frac{\varphi'^2}{F^2 + F'^2}}.$$

Or $\sin c'$ exprime le rapport de deux distances: 1° celle du point (x, y, z) du cône supplémentaire à son axe de révolution; 2° celle $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ de ce même point au pôle. L'axe de figure ayant pour équations

$$x\sin(\theta + a) - y\cos(\theta + a) = 0, \qquad z = 0,$$

la première de ces longueurs a comme expression

$$\sqrt{[x\sin(\theta + a) - y\cos(\theta + a)]^2 + z^2}.$$

De là l'équation de ce cône

$$[x\sin(\theta + a) - y\cos(\theta + a)]^2 + z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\left(1 - \frac{\varphi'^2}{F^2 + F'^2}\right),$$

ou en coordonnées mixtes

$$\sin^2\lambda + \cos^2\lambda \sin^2(\theta - \omega + a) = \frac{F^2 + F'^2 - \varphi'^2}{F^2 + F'^2},$$

$$\cos\lambda \cos(\omega - \theta + a) = \frac{\varphi'}{\sqrt{F^2 + F'^2}},$$

$$(178) \quad \omega - \theta = \text{arc tang}\,\frac{F}{F'} + \text{arc cos}\left(\frac{\varphi'}{\cos\lambda\,\sqrt{F^2 + F'^2}}\right).$$

Telles sont (177) (178) les deux équations de la courbe podaire C. En éliminant entre elles le paramètre θ, on obtiendra celle de la surface podaire.

178. Le calcul se simplifie pour les sphérales vectorielles. En premier lieu les formules (149) (150) qui expriment r_2, θ_2 se réduisent à (151), (152) et donnent à l'équation (177) la forme

$$\frac{R}{\cos^2\lambda} = -\frac{F^2}{F'}\sin(\omega - \theta).$$

En même temps l'égalité (178) devient

$$\omega - \theta = \text{arc tang}\,\frac{F}{F'} + \text{arc cos}\left(\frac{F' \sin b}{\cos\lambda\,\sqrt{F^2 + F'^2}}\right).$$

179. Supposons enfin qu'il s'agisse du sphéro-nautile, en considérant a comme constante. Ces dernières relations deviennent alors

$$\frac{R}{\cos^2\lambda} = -e^{A\theta}\,\text{tang}\,a \sin(\omega - \theta),$$

$$\omega - \theta = a + \text{arc cos}\left(\frac{\cos a \sin b}{\cos\lambda}\right),$$

d'où en substituant la valeur de θ

$$\frac{R}{\cos^2\lambda} =$$

$$\text{tang}\,a \sin\left[a + \text{arc cos}\left(\frac{\cos a \sin b}{\cos\lambda}\right)\right] . e^{A\left[\omega - a - \text{arc cos}\left(\frac{\cos a \sin b}{\cos\lambda}\right)\right]}.$$

Telle est la surface podaire du sphéro-nautile d'indice vectoriel quelconque b.

§ XXVIII

Surfaces antipodaires

180. On sait d'après le théorème de Mac-Cullagh [1], que si, d'une surface quelconque représentée par M sur la figure schématique 27, on prend la transformée M_1 par rayons vecteurs réciproques, puis la podaire M_2 de M_1, et enfin la transformée M_3 de M_2 par rayons vecteurs réciproques, la proposée M est elle même la podaire de M_3.

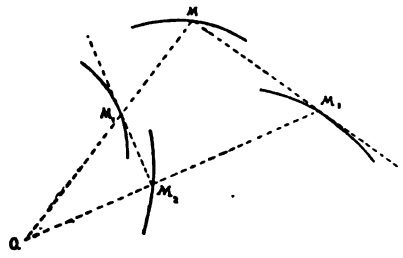

Fig. 27

Imaginons que M soit une sphérale, que nous supposerons vectorielle [2] et de directrice quelconque. En appliquant à son équation les formules générales de la transformation, nous obtiendrons celle de M_1. D'après le théorème fondamental du N° 117, elle sera elle-même une sphérale vectorielle de même indice. La théorie précédente (§ XXVII) nous permet donc de connaitre sa podaire M_2. Puis les formules de la transformation réciproque en déduiront M_3. Mais cette dernière surface M_3 est l'antipodaire de M. Nous possédons ainsi la marche qui nous permettra d'obtenir l'équation de l'antipodaire d'une sphérale vectorielle quelconque.

181. Appliquons la au sphéro-nautile, dont nous avons l'équation générale (137, 138). Je la représenterai en abrégé par

$$f(R, \omega, \lambda) = 0 . \tag{179}$$

---

(1) Dont M. Humbert m'a communiqué une nouvelle et très élégante démonstration, encore inédite.

(2) Il nous serait facile de formuler une méthode applicable à une loi quelconque φ du rayon sphérique; mais je supprimerai ce développement, puis que la formule vectorielle nous suffit pour l'application au sphéro-nautile.

Supposons, pour fixer les idées, cette surface tournoyant dans le sens sinistrorsum.

Le rayon vecteur de l'espace

$$\rho = \frac{R}{\cos\lambda},$$

donne pour la transformation

$$k^2 = \rho\rho' = \frac{RR'}{\cos^2\lambda}, \tag{180}$$

car la latitude λ est la même pour les deux rayons, ainsi que la longitude ω. Il vient donc

$$R = \frac{k^2\cos^2\lambda}{R'},$$

et la transformée M_1 aura pour équation

$$f\left(\frac{k^2\cos^2\lambda}{R'}, \omega, \lambda\right) = 0.$$

Nous savons (N° 116) qu'elle représente un sphéro-nautile identique, mais procédant dextrorsum.

La surface podaire M_2 nous est connue d'après ce qui précède (N° 164). Représentons la en abrégé par

$$F(R', \omega, \lambda) = 0,$$

La transformée réciproque M_3 de celle-ci sera de son côté (180)

$$F\left(\frac{k^2\cos^2\lambda}{R}, \omega, \lambda\right) = 0,$$

et fera connaitre l'antipodaire cherchée du sphéro-nautile (179).

§ XXIX

Surfaces normopodaires

182. Au lieu d'abaisser du pôle, comme au § XXVII, des perpendiculaires sur les divers plans tangents d'une sphérale

quelconque, menons par ce point un plan perpendiculaire à chacune des normales de cette surface. Nous appellerons *normopodaire* le lieu géométrique de leurs intersections.

L'une quelconque de ces droites joint le point N (x, y, z) de la sphérale au point décrivant M $(r\cos\theta,\ r\sin\theta,$ zéro) de la directrice. Elle a donc pour équations

$$(181)\qquad \frac{X - r\cos\theta}{x - r\cos\theta} = \frac{Y - r\sin\theta}{y - r\sin\theta} = \frac{Z}{z},$$

et le plan qu'on lui mène perpendiculairement par l'origine

$$(182)\qquad (x - r\cos\theta)X + (y - r\sin\theta)Y + Zz = 0.$$

On déterminera les coordonnées X, Y, Z de l'intersection en fonction de x, y, z, θ, en adjoignant à ces trois égalités l'équation de la directrice ainsi que les formules (108), (109) qui représentent la sphérale. Il suffira dès lors, pour avoir l'équation de la normopodaire, d'effectuer l'élimination des cinq paramètres entre ces six relations.

183. Si l'on substitue dans la dernière (184) les valeurs de X, Y déduites des deux précédentes, il vient

$$(183)\qquad [(x - r\cos\theta)^2 + (y - r\sin\theta)^2 + z^2]\,Z$$
$$+ [(x - r\cos\theta)\cos\theta + (y - r\sin\theta)\sin\theta]\,rz = 0.$$

Or l'équation (106) de la sphère variable réduit à φ^2 le coefficient de Z; et cette même relation développée sous la forme (107)

$$\rho^2 - 2r(x\cos\theta + y\sin\theta) + r^2 = \varphi^2,$$

(en désignant par ρ le rayon vecteur de l'espace) nous donne pour le coefficient de rz (183)

$$x\cos\theta + y\sin\theta - r = \frac{\rho^2 - r^2 - \varphi^2}{2r}.$$

Il vient donc finalement

$$Z = z\,\frac{\varphi^2 + r^2 - \rho^2}{2r},$$

et par suite

$$(184)\qquad X = \frac{x(\varphi^2 + r^2 - \rho^2) + r(\varphi^2 - r^2 + \rho^2)\cos\theta}{2\varphi^2},$$

$$Y = \frac{y(\varphi^2 + r^2 - \rho^2) + r(\varphi^2 - r^2 + \rho^2)\sin\theta}{2\varphi^2}.$$

184. Ces formules générales se simplifient lorsqu'il s'agit d'une sphérale équiradiale. Si l'on fait en effet $\varphi = r$, il reste seulement

$$(185)\qquad X = x\left(1 - \frac{\rho^2}{2r^2}\right) + \frac{\rho^2}{2r}\cos\theta,$$

$$Y = y\left(1 - \frac{\rho^2}{2r^2}\right) + \frac{\rho^2}{2r}\sin\theta,$$

$$Z = z\left(1 - \frac{\rho^2}{2r^2}\right).$$

Supposons l'équation de la directrice résolue sous la forme ordinaire, et rattachons y l'angle variable

$$\operatorname{tang} a = \frac{F}{F'}, \qquad \sin a = \frac{F}{\sqrt{F^2 + F'^2}}, \qquad \cos a = \frac{F'}{\sqrt{F^2 + F'^2}}.$$

Les équations de la sphérale deviennent de leur côté

$$(186)\qquad \omega = \theta + a - \frac{\pi}{2},$$

$$(187)\qquad R = 2F\sin a\cos^2\lambda.$$

On en déduit identiquement

$$\rho^2 = \frac{R^2}{\cos^2\lambda} = 2RF\sin a,$$

$$x = R\cos\omega = R\sin(\theta + a), \qquad y = R\sin\omega = R\cos(\theta + a),$$

d'où, en développant ces expressions trigonométriques

$$(188)\begin{cases} X = R\left[\left(2 - \frac{R\sin a}{F}\right)\sin a\cos\theta + \left(1 - \frac{R\sin a}{F}\right)\cos a\sin\theta\right], \\ Y = R\left[\left(2 - \frac{R\sin a}{F}\right)\sin a\sin\theta - \left(1 - \frac{R\sin a}{F}\right)\cos a\cos\theta\right], \\ Z = R\,\mathrm{tang}\,\lambda\left(1 - \frac{R\sin a}{F}\right). \end{cases}$$

185. La longitude ω se trouve par là définitivement chassée de nos formules, et la question se réduit à l'élimination de R, λ, θ entre les quatre relations (187), (188).

Pour y procéder, convertissons les coordonnées rectangulaires X, Y, Z, du point quelconque de la normopodaire en coordonnées mixtes R', ω', λ', que nous distinguons par les accents de celles du point N de la sphérale. Il vient ainsi après réductions

$$(189)\begin{cases} R'\cos(\theta - \omega') = X\cos\theta + Y\sin\theta = \left(2 - \frac{R\sin a}{F}\right)R\sin a, \\ R'\sin(\theta - \omega') = X\sin\theta - Y\cos\theta = \left(1 - \frac{R\sin a}{F}\right)R\cos a, \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire

$$(190)\qquad \frac{R^2\sin a}{F} - 2R + \frac{R'\cos(\theta - \omega')}{\sin a} = 0,$$

$$\frac{R^2\sin a}{F} - R + \frac{R'\sin(\theta - \omega')}{\cos a} = 0.$$

En retranchant membre à membre, nous obtenons cette valeur de R en fonction de θ et des nouvelles coordonnées

$$(191)\quad R = R'\left[\frac{\sin(\theta - \omega')}{\cos a} - \frac{\cos(\theta - \omega')}{\sin a}\right] = R'\frac{\cos(\theta + a - \omega')}{\sin a\cos a}.$$

Si d'autre part l'on divise membre à membre les égalités (189), il vient

$$\mathrm{tang}(\theta - \omega') = \cot a \cdot \frac{F - R\sin a}{2F - R\sin a},$$

c'est-à-dire une seconde relation entre R et θ, distincte de la précédente, puisque l'une renferme R′ et l'autre F.

En éliminant R entre ces deux formules, nous formerons une *résolvante* définitive qui ne contiendra plus que θ, et pourra déterminer ce paramètre en fonction de R′, ω'. Il vient ainsi

$$F[(\cos a - 2\tang(\theta - \omega')] = R\frac{\cos(\theta - \omega' + a)}{\cos(\theta - \omega')}.$$

et en substituant la valeur (191) de R

$$(192)\qquad R'\cos^2(\theta + a - \omega') = F\cos a\,[\cos(\theta - \omega')\cos a - 2\sin(\theta - \omega')\sin a].$$

186. Nous pouvons obtenir, en θ, une seconde résolvante de même nature.

Il vient en effet, d'après la valeur (188) de Z, qui n'a pas encore été employée

$$R'\tang\lambda' = R\tang\lambda\left(1 - \frac{R\sin a}{F}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{R^2\sin a}{F} - R + R'\tang\lambda'\cot\lambda = 0.$$

d'où, en comparant à l'égalité (190)

$$(193)\qquad \cot\lambda = \frac{\sin(\theta - \omega')\cot\lambda'}{\cos a}.$$

Nous aurons en conséquence d'après (187), (191)

$$\frac{R'\cos(\theta + a - \omega')}{\sin a\cos a} = R = 2F\sin a\cos^2\lambda = 2F\sin a\frac{\cot^2\lambda}{1 + \cot^2\lambda},$$

$$\cot^2\lambda = \frac{R'\cos(\theta + a - \omega')}{2F\sin^2 a\cos a - R'\cos(\theta + a - \omega')}.$$

Si l'on substitue la valeur (193), on obtient définitivement

$$(194)\qquad R'\cos(\theta + a - \omega') = \frac{2F\sin^2 a\cos a\sin^2(\theta - \omega')}{\sin^2(\theta - \omega') + \cos^2 a\tang^2\lambda'}.$$

Telle est cette seconde résolvante en θ seul, distincte de la précédente, puisque elle renferme λ'.

187. A ces deux résolvantes en θ, nous en pouvons adjoindre une troisième, qui n'en sera plus distincte, et ne pourrait que remplacer l'une d'elles; mais qui présentera ce caractère intéressant de ne plus renfermer la fonction F, dont la caractéristique aura ainsi disparu *en apparence*, puisque F' a déjà cessé de jouer un rôle dans nos formules, mais qui, bien entendu, continue d'exercer *implicitement* son influence par l'intermédiaire de a. Il est donc bon de signaler cette relation, *immuable* dans sa forme, pour toutes les recherches de normopodaires de sphérales équiradiales quelconques.

Il vient à cet égard, en divisant membre à membre (192) et (194)

$$(195)\qquad 2\sin^2 a \sin^2(\theta-\omega')\cos(\theta-\omega'+a)$$
$$=[\cos\theta-\omega'+a]-\sin(\theta-\omega')\sin a][\sin^2(\theta-\omega')+\cos^2 a\,\mathrm{tang}^2\lambda']=0.$$

La normopodaire se trouve donc finalement représentée, entre les coordonnées R', ω', λ' et le paramètre θ par les trois équations (192) (194) (195) qui se réduisent au fond à deux, entre lesquelles il suffirait d'éliminer θ, lorsque sera spécifiée l'expression F, qui définit la directrice dans chaque cas [1].

188. Appliquons cette méthode au sphéro-nautile équiradial.

Le résultat se trouve très directement préparé, puisque nous n'avons qu'à considérer a comme une constante. La relation (195) ne renferme plus alors, dans ce cas spécial, θ que par l'angle $\theta-\omega'$. Si l'on développe les calculs, elle prend la forme:

$$\sin^6(\theta-\omega')$$
$$+[\mathrm{tang}^2\lambda'(1+\cos 2a)(2-\cos 2a)-\cos^2 2a]\sin^4(\theta-\omega')$$
$$+[\mathrm{tang}^2\lambda'(1+3\sin^2 a)-2\cos 2a]\,\mathrm{tang}^2\lambda'\cos^2 a\sin^2(\theta-\omega')$$
$$-\mathrm{tang}^4\lambda'\cos^4 a=0,$$

équation du troisième degré par rapport à l'inconnue $\sin^2(\theta-\omega')$.

---

[1] Il n'y a pas lieu de se poser le problème inverse des normopodaires, de même que le § XXIX résout celui des podaires, car il ne serait pas déterminé.

Représentons en abrégé par $f(\lambda')$ la valeur de $\theta - \omega'$ que nous fourniraient les formules classiques de cette résolution, nous aurons

$$\theta = \omega' + f(\lambda'),$$

et en remplaçant dans la formule (194) F par $e^{A\theta}$

$$R' = f_1(\lambda') e^{Af(\lambda')} . e^{A\omega}.$$

On y reconnait l'équation d'une surface nautiloïde dérivée de la même spirale logarithmique que la proposée. Son profil méridien se trouve représenté, dans le plan ZOX ($\omega' = 0$), entre les coordonnées polaires ρ et λ', par l'équation

$$\rho = \frac{f_1(\lambda') e^{Af(\lambda')}}{\cos \lambda'}.$$

§ XXX

Surfaces cérítoïdes

189. La notion des surfaces nautiloïdes peut sembler, à première vue, comporter une extension, sur la vraie portée de laquelle il ne sera pas inutile de préciser les idées. C'est encore le règne animal qui peut en suggérer la pensée. Les collections paléontologiques présentent en effet, à l'époque tertiaire, et en particulier pour l'étage éocène du calcaire grossier, de nombreux restes du genre cérite (famille des céritidés) dont le représentant le plus remarquable est le *cerithium giganteum*. C'est un fossile, en forme de cornet, qui montre, dans les grandes lignes de sa structure, les circonvolutions d'une cônhélice, avec amplification progressive de la section génératrice guidée par elle, analogue à celle des nautiloïdes.

On peut donc être porté à voir là une généralisation du mode de description de ces dernières surfaces. Cependant cette manière de voir ne constitue à proprement parler qu'une simple apparence. Il n'y a pas au fond, pour le géométre, une famille de *surfaces cérítoïdes* essentiellement distincte des nautiloïdes. Nous ne sortons pas en réalité de cette dernière classe.

Ce n'est pas à dire cependant que cette considération doive être écartée sans examen, et sans retenir un instant l'attention. La conception et l'appellation des cérítoïdes peuvent rendre certains services. Elles sont de nature (à coup sûr pour l'ar-

tiste, et même dans une certaine mesure pour le géomètre), à porter de premier jet plus de clarté dans l'esprit, que la fusion, un peu forcée, des deux classes de surfaces, qu'il nous faut commencer par expliquer.

190. Considérons (fig. 28) dans le plan du premier méridien (1) le profil $C_0 n_0 N_0$, qui engendre un céritoïde en se réduisant sur lui-même vers le pôle, ou s'amplifiant au contraire dans le sens opposé, autour de son centre de similitude C_0 qui décrit une cônhélice, suivant la loi logarithmique envisagée jusqu'ici. Nous obtenons une série de positions de ce point ...., C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, ..., dans les révolutions successives du méridien mobile.

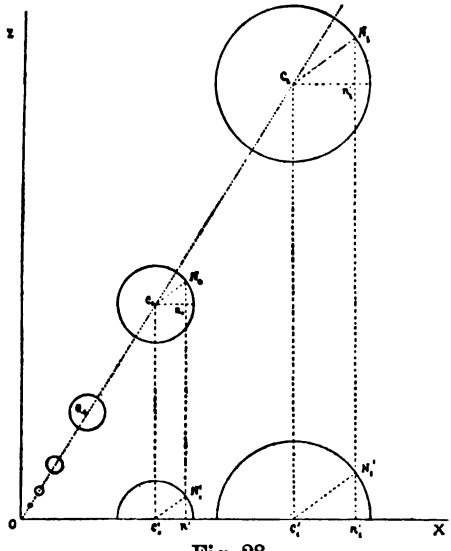

Fig. 28

Rapprochons de cette surface le nautiloïde ordinaire qu'engendrerait, suivant le plan équatorial mené par le sommet O de la cônhélice, une figure $C'_0 n'_0 N'_0$, identique à la précédente, et dont le centre de déformation homothétique C' décrit une spirale logarithmique de même loi amplificative.

Substituons maintenant à la génératrice $C'_0 n'_0 N'_0$ de ce nautiloïde auxiliaire la *génératrice composite* $C'_0 C_0 n_0 N_0$ formée d'un *piédestal* $C'_0 C_0$ surmonté de la figure $C_0 n_0 N_0$ identique à $C'_0 n'_0 N'_0$. Ce piédestal se dilatera pour son propre compte dans le même rapport que les dimensions verticales ou horizontales de l'une et l'autre figure, ou encore que le rayon vecteur OC'_0 de la spirale logarithmique. La surface engendrée par le *mouvement purement nautiloïde du profil composite à piédestal* $C'_0 C_0 n_0 N_0$ ne

(1) Il a été expliqué (N° 32) que la génération par une courbe quelconque, plane ou gauche, peut toujours, dans cet ordre de questions, être ramenée à l'emploi d'un profil-méridien.

différera en rien de celle que produit le *mouvement directement céritoïde de la génératrice proposée* $C_0 n_0 N_0$.

191. Nous pouvons donner à cet aperçu plus de précision, de manière à formuler l'équation générale des surfaces céritoïdes.

Considérons en effet, au bout d'une révolution complète, la section $C'_0 n'_0 N'_0$ à son retour dans le premier méridien suivant $C'_1 n'_1 N'_1$. Comparons les, en cet instant, avec la situation céritoïde $C_1 n_1 N_1$ de $C_0 n_0 N_0$.

L'ordonnée $N_1 n'_1$ d'un point du céritoïde se compose de $N_1 N'_1$ et de $N'_1 n'_1$. Cette dernière partie constitue l'ordonnée du nautiloïde proprement dit, à savoir (17)

$$N'_1 n'_1 = e^{2A\pi} . \Psi (O n'_1 . e^{-2A\pi}).$$

Quant au segment $N_1 N'_1 = C_1 C'_1$ il est égal à la hauteur initiale $h = C'_0 C_0$ du piédestal, amplifiée dans le même rapport

$$N_1 N'_1 = h . e^{2A\pi} .$$

Il vient donc pour l'ordonnée z du céritoïde

$$z = N_1 n'_1 = e^{2A\pi} [h + \Psi (R e^{-2A\pi})] .$$

Le raisonnement que nous venons de faire pour une révolution entière, afin de mieux utiliser la figure tracée dans le premier méridien, convient évidemment à un angle quelconque de rotation ω. Nous aurons donc comme équation générale du céritoïde, en fonction de la hauteur h que possède le piédestal en traversant, pour $\omega = 0$, le premier méridien

$$z = e^{A\omega} [h + \Psi (R e^{-A\omega})] .$$

On voit clairement dès lors, qu'il suffit, pour revenir à l'équation des nautiloïdes (17), de considérer comme un unique symbole fonctionnel $\Psi_1 (\alpha)$ le binôme $h + \Psi (\alpha)$.

192. On pourrait éprouver quelque surprise, presque une déception, en voyant ainsi s'évanouir, quand on la serre de près, une généralisation qui semblait promettre un intérêt analogue à celui du passage des surfaces de révolution aux hélicoïdes, par l'adjonction au phénomène rotatif de cette même composante de translation suivant l'axe. Mais il est facile de faire ressortir la différence profonde qui sépare ces deux cas.

Dans les surfaces de révolution, toutes les trajectoires sont planes; aucune n'y possède la double courbure. Pour l'hélicoïde, toutes deviennent gauches. Dans les nautiloïdes, au contraire, les trajectoires sont déjà gauches. Ce sont des cônhélices. C'est à titre exceptionnel que les seuls points situés dans l'équateur y parcourent des spirales logarithmiques. Il est donc tout simple que l'adjonction de la composante de translation les dénature au fond beaucoup moins. Ce n'est plus alors qu'une simple question de degré. Cette introduction ne fait que modifier l'angle des cônhélices. C'est comme si les pas de toutes les hélices d'un hélicoïde augmentaient d'une même longueur; on ne sortirait pas par là de la catégorie des hélicoïdes.

Toutefois le point de vue céritoïde. ainsi réduit à sa juste valeur, ne semble pas devoir disparaitre du langage des applications. On trouvera toujours plus claire la conception directe du mouvement d'un profil s'élevant en vrille autour d'un axe, que celle de l'adaptation factice à ce profil d'un piédestal pour imprimer à l'ensemble le mouvement nautiloïde plan. Sous cette réserve, cette considération du piédestal est bien cependant la voie à suivre dans chaque cas pour former l'équation de ces surfaces.

193. Je me contenterai à cet égard d'un seul exemple, au quel se rapporte précisément la figure 28, dans laquelle la génératrice est supposée circulaire.

Il suffira pour cela d'employer l'équation de la circonférence dont le centre occupe le sommet du piédestal h. Elle nous est fournie par le triangle OCN, supposé tracé dans un méridien de longitude ω

$$\overline{CN}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{ON}\,.\,\overline{OC}\cos NOC\,.$$

L'angle NOC est l'excédent $\eta - \lambda$, par rapport à la latitude λ du point N, de l'angle fixe η que fait avec l'équateur OC (1). En second lieu, ON représente le rayon vecteur de l'espace $\frac{B}{\cos\lambda}$. On a encore

$$OC = \frac{OC'}{\cos\eta} = \frac{e^{A\omega}}{\cos\eta}.$$

(1) Dans ces conditions, tang η mesure la hauteur h du piédestal au moment où sa projection passe par le point I de la spirale logarithmique directrice.

Enfin CN est le rayon Br, ou B$e^{A\omega}$ de la circonférence génératrice.

Il vient d'après cela

$$B^2 e^{2A\omega} = \frac{R^2}{\cos^2\lambda} + \frac{e^{2A\omega}}{\cos^2\eta} - 2\frac{R}{\cos\lambda}\cdot\frac{e^{A\omega}}{\cos\eta}\cos(\lambda-\eta),$$

ou en multipliant par $e^{-2A\omega}\cos^2\eta$

$$\left(\frac{Re^{-A\omega}\cos\eta}{\cos\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{Re^{-A\omega}\cos\eta}{\cos\lambda}\right)\cos(\lambda-\eta) + 1 - B^2\cos^2\eta = 0,$$

et en résolvant:

$$\frac{Re^{-A\omega}\cos\eta}{\cos\lambda} = \cos(\lambda-\eta) \pm \sqrt{\cos^2(\lambda-\eta) + B^2\cos^2\eta - 1},$$

c'est-à-dire enfin

$$R = e^{A\omega}\cdot\frac{\cos\lambda}{\cos\eta}\left[\cos(\lambda-\eta) \pm \sqrt{\sin^2 b\cos^2\eta - \sin^2(\lambda-\eta)}\right].$$

Telle est l'équation du céritoïde à front méridien circulaire. On y retrouve, pour l'hypothèse $\eta = 0$, l'équation (6) du nautiloïde à front méridien circulaire.

194. La section droite serait déterminée par le plan normal à la cônhélice directrice. Elle se rapprochera d'autant plus d'une forme ronde, que ce plan sera lui-même plus voisin du méridien, c'est-à-dire η de zéro, et a de $\frac{\pi}{2}$; ou enfin que l'on emploiera des spirales et des cônhélices plus lentes.

Pour assurer définitivement à la surface ce que nous avons appelé (N° 101) le caractère des corps arrondis, il faudrait envisager le *sphéro-cérite*, c'est-à-dire la sphérale vectorielle qui a pour directrice une cônhélice. Contentons nous d'en effectuer le calcul pour l'hypothèse équiradiale.

L'équation de la sphère variable

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

se réduit à

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\alpha = e^{A\theta}\cos\theta\,, \qquad \beta = e^{A\theta}\sin\theta\,, \qquad \gamma = e^{A\theta}\operatorname{tang}\eta\,,$$

et par suite:

$$\rho^2 - 2e^{A\theta}(x\cos\theta + y\sin\theta + z\operatorname{tang}\eta) = 0\,,$$

$$\frac{\rho^2}{2R} = e^{A\theta}[\cos(\theta-\omega) + \operatorname{tang}^2\eta]\,.$$

La dérivée de cette équation par rapport à θ nous donne

$$Ae^{A\theta}[\cos(\theta-\omega) + \operatorname{tang}^2\eta] - e^{A\theta}\sin(\theta-\omega) = 0\,.$$

Mais on tire de la précédente

$$\cos(\theta-\omega) = \frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}} - \operatorname{tang}^2\eta\,,$$

d'oú en substituant ici

(196) $$\sin(\theta-\omega) = A\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}}\,.$$

Il vient donc en ajoutant les carrés

$$A^2\left(\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}}\right)^2 + \left(\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}} - \operatorname{tang}^2\eta\right)^2 = 1\,,$$

$$\frac{1}{\sin^2 a}\left(\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}}\right)^2 - 2\operatorname{tang}^2\eta\left(\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}}\right) + \operatorname{tang}^4\eta - 1 = 0\,,$$

$$\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}} = \sin^2 a\,[\operatorname{tang}^2\eta \pm \sqrt{\operatorname{tang}^4\eta - \sin^2 a\,(\operatorname{tang}^4\eta - 1)}]\,,$$

et enfin

(197) $$\frac{\rho^2}{2Re^{A\theta}} = C\,,$$

si nous représentons pour abréger par C la valeur constante

$$C = \sin a\,(\sin a\operatorname{tang}^2\eta \pm \sqrt{1 - \cos^2 a\operatorname{tang}^4\eta})\,.$$

En substituant dans la relation (196), il nous vient

$$\sin(\theta-\omega) = AC\,, \qquad \theta = \omega + \arcsin AC\,,$$

et d'autre part (197)

$$e^{A\theta} = \frac{1}{2C} \cdot \frac{\rho^2}{R} = \frac{1}{2C} \cdot \frac{R}{\cos^2 \lambda},$$

d'où en remettant cette valeur de θ

$$R = 2C \cos^2 \lambda . e^{A(\omega + \text{arc sin } AC)}.$$

Lorsque l'on suppose $\eta = 0$, la constante C se réduit à $\sin a$; AC à $\cos a$; arc sin AC à $\frac{\pi}{2} - a$. Il vient dès lors simplement

$$R = 2 \sin a \cos^2 \lambda . e^{A\left(\omega + \frac{\pi}{2} - a\right)},$$

et l'on retrouve l'équation (146) du sphéro-nautile équiradial.

195. Terminons cette longue étude par la propriété suivante. *La surface réciproque d'un sphéro-cérite vectoriel quelconque par rapport à son pôle est un sphéro-cérite égal, mais de sens interverti.*

Appliquons en effet le théorème fondamental du N° 116. La réciproque de la cônhélice directrice sera une cônhélice symétrique, puisque ce mode de transformation conserve les angles. La nouvelle directrice, qui doit lui être semblable, sera donc une cônhélice identique à celle-ci, mais déviée sur son cône. Quant au rapport vectoriel, on sait qu'il est conservé sans altération.

Plus généralement, enveloppons le plan d'une spirale logarithmique sur un cône quelconque, (et non plus de révolution), ayant son sommet au pôle de cette courbe. Traçons sur ce cône la transformée par rayons vecteurs réciproques de la ligne gauche ainsi obtenue, puis une ligne homothétique de celle-ci. Enfin développons la surface conique. Cette dernière courbe se transformera en une nouvelle spirale logarithmique égale à la première, mais de sens contraire. En effet l'enroulement, la transformation, l'homothétie, le déroulement constituent quatre opérations qui conservent les angles. Celui de la courbe avec son rayon vecteur doit donc rester constant.

Construisons maintenant, pour les deux lignes coniques comme directrices, avec un même module vectoriel, deux sphérales. Ces deux surfaces, d'après le théorème fondamental (N° 116) seront les transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques. La proposition précédente n'est donc plus qu'un cas particulier de celle-ci, relatif au cône de révolution.

This book should be returned
the Library on or before the last da
stamped below.
A fine of five cents a day is incurr
by retaining it beyond the specifi
time.
Please return promptly.

DUE NOV 1946

Math 9109.08
Surfaces nautiloides /
Cabot Science 003359648
3 2044 091 923 797